Всероссийская молодежная научная конференция "Все грани математики и механики"

Сборник тезисов докладов

25-29 апреля 2016

Содержание

СЕКЦИЯ

АЛГЕБРА

Исследование алгоритмов матричных модулярных цифровых подписей

Горбунов Е. С.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: ghostman23@mail.ru

Безопасность большинства современных алгоритмов асимметричной криптографии основывается на двух задачах теории чисел - факторизации и дискретного логарифмирования. Но эти задачи можно решить за полиномиальное время на квантовом компьютере. Поэтому существует необходимость в новых алгоритмах, которые были бы устойчивы к атакам квантового компьютера.

Рассмотрим криптографический пакет OpenSSL. Данный пакет используется практически всеми сетевыми серверами для защиты передаваемой информации. Он использует такие алгоритмы как RSA, DSA, протокол Диффи-Хэллмана и т.д., которые основаны на вышеописаных задачах теории чисел.

Ранее уже рассматривались возможные алгоритмы для замены. RSA можно заменить BMMC или MMMC1 [1] и вместо протокола Диффи-Хеллмана использовать его некоммутативный аналог на основе BMMC [2]. Остается заменить алгоритмы цифровых подписей. Как раз такие алгоритмы описаны в работе Семёна Константиновича Росошека [3]. Эти подписи являются не только не менее безопасными, но и, по теоретическим оценкам, работают быстрее существующих.

Литература

1. Rososhek S.K. Modified Matrix Modular Cryptosystem, British Journal of Mathematics and Computer Science, v.5, No. 5, 2015, pp. 613-636.

2. Rososhek S.K., Gorbunov E.S. Noncommutative analogue of Diffie-Hellman protocol in matrix ring over residue ring, International Journal of Computers and Technology, v.11, issue 10, 2013, pp. 3051-3059.

3. Rososhek S.K. Fast and Secure Modular Matrix Based Digital Signature, British Journal of Mathematics and Computer Science, v. 13, issue 1, 2016, pp. 20-40

Вполне инертные подгруппы абелевых групп

Соболева А. А., Чехлов А. Р.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: anna_soboleva_aleksandrovna@mail.ru

Определение 1. *Пусть G - группа, а ϕ - ее эндоморфизм. Подгруппа H группы G называется ϕ - инертной, если $H \cap \phi(H)$ имеет конечный индекс в $\phi(H)$; это эквивалентно тому, что факторгруппа $(\phi(H)+H)/H$ конечна. Подгруппа H называется вполне инертной, если она ϕ- инертна для любого эндоморфизма ϕ группы G.*

Вполне инертные подгруппы представляют собой обобщение конечных подгрупп и подгрупп с конечным индексом,а также вполне инвариантных подгрупп.

Определение 2. *Говорят, что две подгруппы K, H группы G соизмеримы, если факторгруппы $(K+H)/H$ и $(K+H)/K$ являются конечными.*

Теорема 1. *1) Всякая вполне инертная подгруппа свободной группы соизмерима с вполне инвариантной подгруппой.*

2) Пусть G — p-группа, являющейся прямой суммой циклических групп. Тогда всякая пролне инертная ее подгруппа соизмерима с вполне инвариантной подгруппой.

Пример. В группе без кручения G ранга 1 всякая ее вполне инертная подгруппа будет соизмерима с вполне инвариантной тогда и только тогда, когда pG $\neq$G.

Литература

1. Dikranjan D., Giordano Bruno A., Salce L., Virili S. Fully inert subgroups of divisible Abelian groups.
2. Dikranjan D., Salce L., Zanardo P. Fully inert subgroups of free Abelian groups.

2-хорошие диагональные формальные матрицы над кольцом целых чисел

Норбосамбуев Ц. Д.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: nstsddts@yandex.ru

Элемент кольца называется *хорошим*, если он представим в виде суммы обратимых элементов этого кольца. С формальными матрицами и кольцами формальных матриц можно ознакомиться в [1] и [2]. Здесь же будут приведены некоторые факты о 2-хорошести диагональных формальных матриц над кольцом целых чисел.

Теорема 1. *Пусть дано кольцо формальных матриц $M(n, R, \{s_{ijk}\})$, где R - коммутативное кольцо с еденицей. Пусть A - матрица из этого кольца. Матрица A обратима тогда и только тогда, когда её определитель - обратимый элемент кольца R. [1]*

Следствие 1. *Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ - кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел. Диагональная матрица A=diag(a,b) будет 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$ тогда и только тогда, когда найдутся такие целые x, a_1, a_2, b_1, b_2, что $a = a_1 + a_2, b = b_1 + b_2$ и $a_1 \cdot b_1 - s \cdot x = \pm 1$, $a_2 \cdot b_2 - s \cdot x = \pm 1$.*

Следствие 2. *Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ - кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел и пусть множитель s - четное число. Если диагональная матрица A=diag(a,b) является 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$, то тогда её элементы - a и b - четные числа.*

Следствие 3. *Пусть $M(2, \mathbb{Z}, s)$ - кольцо формальных матриц порядка 2 над кольцом целых чисел. Диагональная матрица A=diag(a,0) будет 2-хорошей в $M(2, \mathbb{Z}, s)$ тогда и только тогда, когда $a \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$.*

Литература

1. Крылов П.А., Туганбаев А.А. Формальные матрицы и их определители // Фундаментальная и прикладная математика. 2014. № 1(19). С. 65 – 119.
2. Норбосамбуев Ц.Д. О суммах диагональных и обратимых обобщенных матриц // Вестник Томского госуниверситета. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 34 – 41.

Инфраструктура открытых ключей матричных модулярных криптосистем

Гареева Д. Р., Росошек С. К.

Томский государственный университет, г. Томск
e-mail: : djimitaiga@yandex.ru

По общему мнению экспертов по компьютерной безопасности с каждым годом увеличивается количество кибератак в Интернете. Подделка цифровых сертификатов и использование отозванных сертификатов ставит на повестку дня разработку новой инфраструктуры открытых ключей. Представляется перспективным использование identity-based криптографии, в которой открытые ключи пользователя формируются на основе его персональной идентификационной информации и не требуют подтверждения специальными удостоверяющими центрами.

Разработка данного подхода требует решения проблемы эффективного вычисления секретных ключей, соответствующих данным открытым ключам. К сожалению, классические криптосистемы с открытым ключом, такие как, например, RSA или ElGamal не подходят для этой цели. Для криптосистемы RSA это задачи целочисленной факторизации и извлечения модулярного корня e-ой степени, где e – открытая экспонента шифрования. Для криптосистемы ElGamal - это задача дискретного логарифма. В качестве выхода из сложившегося тупика предлагается использовать новый класс криптосистем с открытым ключом, а именно, матричные модулярные криптосистемы и цифровые подписи. Цель данной работы состоит в том, чтобы показать, каким образом на базе этих криптосистем можно реализовать identity-based подход.

Литература

1. Rososhek S.K. Modified Matrix Modular Cryptosystems. British Journal of Mathematics & Computer Science, ISSN: 2231-0851,2013,Vol.: 5, Issue.: 5, 613-636.

2. G.R. Blakley and D. Chaum (Eds.): Advances in Cryptology - CRYPT0 '84, LNCS 196, pp. 47-53, 1985. (c) Spnnger-Verlag Berlln Heldelberg 1985

Относительные голоморфы абелевых групп без кручения

Разина А. В.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, город Томск
e-mail: anastacie.razina@mail.ru

При исследовании свойств группы G и её группы автоморфизмов $Aut(G)$ удобно рассматривать такую алгебраическую систему, в которую изоморфно вкладывались бы как сама группа G, так и группа её автоморфизмов $Aut(G)$. Одной из таких систем является голоморф группы G – полупрямое расширение группы G с помощью группы ее автоморфизмов, обозначаемое через $\Gamma(G)$.

Голоморф группы можно рассматривать как множество пар вида (g, σ), где $g \in G$, $\sigma \in Aut(G)$. $\Gamma(G)$ является группой относительно операции сложения, введенной следующим образом:

$$(g, \sigma) + (a, \tau) = (g + \sigma a, \sigma\tau)$$

Ряд полезных свойств голоморфа абелевой группы был получен в [1].

Часто вместо всей группы $Aut(G)$ рассматривается некоторая подгруппа Φ группы $Aut(G)$. В этом случае естественным образом возникает понятие относительного голоморфа, обозначаемого через $\Gamma(G, \Phi)$.

Ранее было доказано, что свободные абелевы группы с изоморфными относительными голоморфами изоморфны [2]. Если группа Φ имеет некоторые ограничения, то можно получить определяемость большего числа абелевых групп своими относительными голоморфами. На данный момент проверяется справедливость следующей теоремы:

Теорема. Если G и G' – делимые абелевы группы, каждая из которых изоморфна нормальной подгруппе относительного голоморфа другой группы, то G и G' изоморфны.

Литература

1. Гриншпон И. Э. Нормальные подгруппы голоморфов абелевых групп и почти голоморфный изоморфизм//Фундамент. и приклад.матем. 2007. N3. C.9-16.

2. Разина А.В. Относительные голоморфы свободных абелевых групп и их нормальные подгруппы // Вестн Том. гос. ун-та. Математика и механика. 2015. № 4(36). С. 41–45.

Ортогональность в l-группах

Фуксон С. Л.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск
e-mail: fouk.son.ya@gmail.com

В. М. Копытов [1] вводит понятие ортогональности элементов решёточно упорядоченной группы следующим образом.

Определение 1. *Элементы a, b l-группы G называются еортогональными, если $|a| \bigwedge |b| = e$. Обозначим ортогональность элементов a и b символом $a \perp_e b$.*

В [2] авторы вводят понятие бинарного отношения ортогональности в произвольных абелевых группах.

Определение 2. *Пусть $(G, +)$ – аддитивная абелева группа. Пусть $\perp$ – бинарное отношение в G, удовлетворяющее следующим аксиомам:*

(A1) $\forall a \in G \exists b \in G : a \perp b;$
(A2)$\forall a \in G \setminus \{0\} : a \not\perp a;$
(A3)$\forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow b \perp a;$
(A4)$\forall a, b, c \in G : a \perp b \bigwedge a \perp c \Rightarrow a \perp (b + c);$
(A5)$\forall a, b \in G : a \perp b \Rightarrow a \perp -b.$
Бинарное отношение $\perp$ назовём ортогональностью в G.

В настоящей работе исследуется отношение ортогональности в решётках, доказываются некоторые свойства, позволяющие установить его связь с аксиомами (A1) - (A5). В частности доказана следующая

Теорема 1. $\forall a, b \in G : a \perp_e b \Rightarrow a \perp b$

Литература

1. Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. М.: Наука, 1984.
2. P. Haukkanen, M. Mattila, J. K. Merikoski, T. Tossavainen. Perpendicularity in an Abelian Group // International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. 2013. V. 13.

СЕКЦИЯ

ГЕОМЕТРИЯ И ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Математическое моделирование поверхности профильной фрезы для обработки выходной детали передаточного механизма

Костарев А. А., Щербаков Н. Р.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: artem_kost@bk.ru

Формообразование деталей передаточных механизмов – это процесс, охватывающий геометрию поверхностей деталей и обрабатывающих инструментов (фрез) и кинематику их относительного движения в процессе обработки [1]. Профильные фрезы позволяют вытачивать поверхность зуба передаточного механизма «за один заход» в отличие от сферических и тороидальных фрез, обработка которыми происходит последовательным вытачиванием координатных линий на поверхности детали [2]. В работе построена геометрическая модель поверхности профильной фрезы (как поверхности вращения) для обработки выходной детали цилиндрического передаточного механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением [3]. Представлены итоговые рисунки спроектированного профильного инструмента. Созданы компьютерные программы для нахождения массивов точек поверхностей фрез.

Литература

1. Литвин Ф. Л. Теория зубчатых зацеплений. – М.: Наука, 1968. – 584 с.
2. Радзевич С. П. Формообразование поверхностей деталей. Основы теории. Монография – Киев.: Растан, 2001. – 592с.
3. Kazakyavichyus S. M., Stanovskoy V. V., Remneva T. A., Kuznetsov W. M., Bubentchikov A. M., Shcherbakov N. R. Perfomance of Eccentric-Cycloid Engagement with Change in the Interaxial Distance: Modification of Tooth Configuration// Russian Engineering Research, 2011, Vol. 31, No.3, pp.197–199.

Полюсный контакт для реечной передачи с эксцентриково–циклоидальным зацеплением

Богомолов Н. И., Щербаков Н. Р.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: le.magicien.fum@gmail.com

В работе решена задача определения основных параметров механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением [1],при которых можно добиться положения точки контакта в полюсе зацепления, то есть в точке, которая делит расстояние между колесами,в отношении,равном передаточному отношению. Полюсный контакт обеспечивает режим качения профиля без проскальзывания и минимизации потерь на трение. Составлена и решена система уравнений для определения угла доворота деталей для контакта в полюсе. Найдены усилия в точке контакта и КПД=99.999.

Литература

1. Бубенчиков А.М.,Щербаков Н.Р.,Становской В.В., Казакявичюс С.М.,Ремнёва Т.А. Математическое моделирование работы зубчатой реечной передачи с эксцентриково- циклоидальным зацеплением // Вычислительные технологии. – 2010. – Т. 15. – № 1. – С. 53–59.

Геометрия полюсного зацепления цилиндрической передачи

Братчикова Ж. В., Щербаков Н. Р.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: janna-ntktw@mail.ru

Полюсом зацепления передаточного механизма называется точка, которая делит расстояние между осями колес, в отношении, равном передаточному отношению. При наличии технологического зазора можно обеспечить положение точки контакта деталей в полюсе зацепления. Составлена и решена система уравнений для определения угла доворота деталей до контакта в полюсе. Тем самым обеспечивается режим качения профилей без проскальзывания и минимизация потерь на трение. Определены усилия в точке контакта и составлена программа для определения КПД механизма с эксцентриково-циклоидальным зацеплением [1].

Литература

1. S.M. Kazakyavichyus, V.V. Stanovskoy, T.A. Remneva, W.M. Kuznetsov, A.M. Bubentchikov, N.R. Shcherbakov. Perfomance of Eccentric-Cycloid Engagement with Change in the Interaxial Distance: Modification of Tooth Configuration// Russian Engineering Research, 2011, Vol. 31, No.3, pp.197-199.

СЕКЦИЯ

ТОПОЛОГИЯ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Топология Визмана

Малышева В. Л., Гензе Л. В.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: malysheva_viktoria@mail.ru

Пусть (X, d) — метрическое пространство и $CL(X)$ — семейство всех непустых замкнутых подмножеств X. Если $x \in X$ и $A \in CL(X)$, то положим $d(x, A) = \inf\{d(x, a) \mid a \in A\}$.

Определение 1. ([1]) *Топология Визмана τ_{W_d} на $CL(X)$ — это слабейшая топология на $CL(X)$, относительно которой непрерывны все отображения семейства $\{d(x, \cdot) \mid x \in X\}$.*

Окрестностями множества A в топологии τ_{W_d} будут «верхние» окрестности $\bigcap_{i=1}^{n} \{F \in CL(X) \mid d(x_i, F) > d(x_i, A) - \delta\}$ и «нижние» окрестности $\bigcap_{i=1}^{n} \{F \in CL(X) : d(x_i, A) > d(x_i, F) - \delta\}$, где $\delta > 0$ и $\{x_1, ..., x_n\} \subset X$. Окрестности последнего вида совпадают с нижней топологией Вьеториса на $CL(X)$.

Теорема 1. ([1]) *Топология Визмана на $CL(X)$ допустима, хаусдорфова и вполне регулярна.*

Пусть X и Y — метрические пространства. Отождествляя функцию с ее графиком, множество $C(X, Y)$ всех непрерывных функций из X в Y можно рассматривать как подмножество в $CL(X \times Y)$. Если мы наделяем $X \times Y$ какой-либо метрикой ρ, то с пространства $CL(X \times Y)$ на $C(X, Y)$ индуцируется топология Визмана τ_{W_ρ}.

Родственной с топологией Визмана является топология W-сходимости на $C(X, Y)$, введенная S.A. Naimpally в [2].

Наша работа посвящена сравнению сходимости функций в вышеприведенных и некоторых других топологиях. Важным объектом здесь являются так называемые BTB-пространства (те метрические пространства, в которых каждый шар вполне ограничен).

Литература

1. Beer G. Topologies on closed and closed convex sets. Kluvert Academic Publishers, 1993.
2. Naimpally S.A. Wijsman convergence for function spaces // Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. 1988. V. 18. P. 343–358.
3. Di Maio G., Holá Ľ., Recent Progress in Function Spaces. Roma, Aracne Editrice. 1998.

Вычисление модуля сферического кольца

Асанбеков У. К., Малютина А. Н.

Томский государственный университет
e-mail: urmat_1396@mail.ru,nmd@math.tsu.ru

Данная работа посвящена вычислению модуля порядка β сферического кольца. Мы обобщаем пример (8) для [1]. Пусть $G=\{x : |x| < r_2\}$ и $E=\{x : |x| \leq r_1\}$, $r_1<r_2$–концентрические шары и $\Gamma \subset G$–семейство кривых, соединяющих G и E, тогда справедливо равенство

$$M(\Gamma) = \omega_{n-1} \ln^{1-n} \frac{r_2}{r_1} \tag{1}$$

а если $1 < \beta < n$, то

$$M_\beta(\Gamma) = \omega_{n-1} \left(\frac{n-\beta}{\beta-1}\right)^\beta \left(r_1{}^{\frac{\beta-n}{\beta-1}} - r_2{}^{\frac{\beta-n}{\beta-1}}\right)^{1-\beta} \tag{2}$$

где ω_{m-1}–площадь поверхности единичной $(n-1)$–мерной сферы. Для доказательства (2) используем как и в [2] экстремальную метрику

$$\rho_0(x) = \left\{ \frac{\frac{\beta-n}{\beta-1} r^{\frac{\beta-n}{\beta-1}-1}}{r_2^{\frac{\beta-n}{\beta-1}} - r_1^{\frac{\beta-n}{\beta-1}}} \left(1+|x|^2\right)^{\frac{n}{\beta}}, \text{если } x \in G \ 0, \text{если } x \notin G \right. \tag{3}$$

Литература

1. Сычев А.В. Модули и пространственные квазиконформные отображения. Новосибирск: Наука, 1983. – 152 с.
   Асанбеков У.К. Малютина А.Н. Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна-2016". Воронеж:Издательско-полиграфический центр "Научная книга", 2016. - 464 с.

2. Асанбеков У.К. Малютина А.Н. Материалы международной конференции "Воронежская зимняя математическая школа С.Г.Крейна-2016". Воронеж:Издательско-полиграфический центр "Научная книга", 2016. - 464 с.

Обобщенная производная и ее связь с дифференцируемостью

Слободчук В.А., Малютина А.Н.

Томский государственный университет
e-mail: vladeska96@gmail.com, nmd@math.tsu.ru

Определение 1. *Пусть ϕ задана в области Ω и суммируема по любой ограниченной области G такой, что $\bar{G} \subset \Omega$. Рассмотрим функцию ψ, непрерывную со всеми производными до порядка l включительно и равную тождественно нулю вне некоторой ограниченной области V_ψ , такой что $\bar{V}_\psi \subset \Omega$. Если ϕ имеет непрерывные производные, то*

$$\int_\Omega \left(\phi \frac{\delta^l \psi}{\delta {x_1}^{\alpha_1} ... \delta {x_n}^{\alpha_n}} + (-1)^{l+1} \psi \frac{\delta^l \phi}{\delta {x_1}^{\alpha_1} ... \delta {x_n}^{\alpha_n}} \right) dv = 0$$

Пример 1. *Пусть $\phi(x)$ непрерывна на [0,1] , имеет почти везде производную$\frac{d\phi}{dx}$, но не абсолютно непрерывна, то она не имеет обобщенной производной. Таким образом, из существования производной почти везде не следует существование обобщенной производной.*

Пример 2. *Рассмотрим функцию двух переменных $\phi(x, y) = f_1(x)+ f_2(y)$, гдеf_1и f_2 непрерывные на всей прямой, но нигде не дифференцируемые функции; тогда $\phi(x, y)$ не имеет производных в обычном смысле, но обобщенная производная$\frac{\delta^2 \phi}{\delta x \delta y}$ существует и равна 0 в любом прямоугольнике $\Omega : a < x < b, c < y < d$.*

Литература

1. 1. С. Л. Соболев. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Москва: Наука, 1988. – С. 46-48.

Асимптотические поднятия кривой и асимптотические значения в R^n

Бальжинова Т.В., Малютина А.Н.

Томский государственный университет
e-mail: tuyana-balzhinova@mail.ru, nmd@math.tsu.ru

В работе рассматриваются асимптотические поднятия кривых и асимптотические значения. Пусть $U \subset R^n$ – область в R^n и $f : U \to R^n$ квазирегулярное отображение, далее будем считать, что $f \in K(U)$ [1]. Кривую и дуги кривой мы понимаем как в [2].

Определение 1. *Поднятием кривой $\gamma_* = f(\gamma)$ называется кривая γ в U такая, что $f \circ \gamma = \gamma_*$. Частичным поднятием γ_* назовем поднятие ее дуги. Пусть $f \in K(U)$ и $y \in R^n$. Рассмотрим спрямляемую кривую $\gamma_*(t) : [0, 1] \to R^n$, для которой $\lim_{x\to 1} \gamma_*(t) = y$.*

Определение 2. *Пусть существует такая спрямляемая кривая γ в U, что $f \circ \gamma = \gamma_*$ и $\lim_{t\to 1} \gamma(t) = x$. Тогда кривая γ_* называется асимптотической для точки x, γ — ее асимптотическим поднятием, а y — асимптотическим значением f в . Если I — все особое множество и $I_1 \to I$, то семейство асимптотических кривых (для I_1) — это все асимптотические кривые для точек $x \in I$ ($x \in I_1$). Пусть I-множество особых точек отображения $f \in K(U)$.*

Определение сферического модуля и его свойства мы берем в [3].

Теорема 1. *Пусть $f \in K(U \setminus I)$, $U \setminus I$ связно, $\Gamma_*(I_0)$ - семейство асимптотических кривых для точек $x \in I_0$ и $capA > 0$. Тогда $M_\beta(\Gamma_*(I_0)) = 0$ в том и только том случае, если $M_\beta(\Gamma_*(A, I_0)) = 0$. Теорема1 обобщает теорему2[1,с.4] на случай сферического модуля порядка β.*

Литература

1. Полецкий Е.А. О стирании особенностей квазиконформных отображений,Мат.сб.,1973, том92(134), номер 2(10), 242-256.

2. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением.-Новосибирск: Наука,1982

3. Malyutina A., Elizarova M., Mappings with s-averaged charateristic. Definition and properties. LAP LAMBERT Acodemic Publishing ISBN: 978-3-8484-1319-5.2013.121p.

Степень отображения

Борькина Э. Б., Малютина А. Н.

Томский государственный университет
e-mail: elya.borkina@gmail.com

Основное топологическое понятие, используемое при изучении пространственных отображений, - степень отображения.

Определение 1. *Пусть $f : G \to R^n$ – отображение класса C^k, $k \geq 1$, компактной области $G \subset R^n$. Будем говорить, что f регулярно относительно точки $y \in R^n$, если выполнены следующие условия:*
1)Точка $y(f, G)$ допустима, т. е. $y \notin f(\delta G)$;
2)Множество $f^{-1}(y)$ конечно;
3)В каждой точке $x \inf^{-1}(y)$ якобиан отображения f отличен от нуля;
В частности, f регулярно относительно y, если $f^{-1}(y)$ пусто.

Пусть $f : G \to R^n$ – отображение класса C^k, регулярное относительно точки $y \in R^n$. Общее число точек множества $f^{-1}(y)$ обозначим через N. Пусть N^+ - число тех точек $x \in f^{-1}(y)$, в которых $F(x, f) > 0$, а N^-– число тех точек $x \inf^{-1}(y)$, где $F(x, f) < 0$. Очевидно, $N = N^+ + N^-$. Число $\mu = N^+ + N^-$– называется степенью или топологическим индексом отображения f относительно точки y и области G и обозначается символом $\mu(y, f, G)$. Если $f^{-1}(y)$ пусто, то каждое из чисел N, N^+ и N^- равно нулю и, значит, в этом случае $\mu(y, f, G) = 0$.
Отметим одно из свойств этого понятия: аддитивное свойство степени отображения.
Пусть $G_0, G_1, \ldots, G_m$– компактные области, причем $G_i \subset G_0^0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$ и G_i, G_j при $i \neq j$ не имеют общих внутренних точек. Пусть $f : G_0 \to R^n$ непрерывно. Предположим, что точка $y \in R^n$ такова, что $f^{-1}(y) \subset U_{i=1}^m G_i$ и точки $y(f, G)$ – допустима для $i = 0, 1, 2, \ldots, m$. Тогда $\mu(y, f, G_0) = \sum_{i=1}^m \mu(y, f, G_i)$

Литература

1. Решетняк Ю.Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. – Новосибирск: Наука, 1982.

Свободные липшицевы пространства

Реброва М. О.,Гулько С. П.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: rijayababa@gmail.com

Рассматривается метрическое пространство (M, d) с отмеченной точкой. Даются определения пространства Липшица $Lip_0(M)$ и свободного липшицева пространства $\mathcal{F}(M)$.

Приводятся примеры наиболее полно изученных свободных липшицевых пространств $\mathcal{F}(\mathbb{R}) = \mathcal{L}_1(\mathbb{R})$ и $\mathcal{F}(\mathbb{N}) = \ell_1(\mathbb{N})$.

Доказывается ряд теорем, касающихся свойств свободных липшицевых пространств, а так же теорема об $(1+\varepsilon)$-изоморфизме.

Литература

1. Albiac F. and Kalton N. J., Topics in Banach space theory, Graduate texts in Mathematics, Springer, New York, London, 2006.
2. Godard A., Tree metrics and their Lipschitz-free spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 138 (2010), no. 12, 4311– 4320.
3. Godefroy G. and Kalton N. J., Lipschitz-free Banach spaces, Studia Math. 159 (2003), no. 1, 121–141. Dedicated to Professor Aleksander Pe lczynski on the occasion of his 70th birthday.
4. Petitjean C., Linear structure of Lipschitz-free spaces over countable compact metric spases. – URL:http://arxiv.org/pdf/1603.01391.pdf (14.04.16)
5. Weawer N., Lipschits algebras// World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 1999.

Об одном свойстве свободных топологических групп

Каргин Д. И.

НИ ТГУ, г. Томск
e-mail: mmf.a.kargin.denis@stud.tsu.ru

В данной работе исследуется вопрос об H-инвариантности класса линделёфовых топологических групп и класса наследственно-линделёфовых топологических групп.

Определение 1. *Тихоновские топологические пространства X и Y называются H-эквивалентными, если свободные топологические группы $F(X)$ и $F(Y)$ гомеоморфны.*

Определение 2. *Свойство называется H-инвариантным, если оно сохраняется H-эквивалентностью.*

Теорема 1. *Класс сепарабельных топологических пространств является H-инвариантным.*

Определение 3. *Топологическое пространство называется σ-метризуемым, если оно представимо в виде счётного объединения метризуемых подпространств.*

Теорема 2. *Класс паракомпактных σ-метризуемых топологических групп является H-инвариантным.*

Приведенные теоремы позволяют в частном случае ответить положительно на поставленный вопрос:

Теорема 3. *Пусть X линделёфова (наследственно-линделёфова) σ-метризуемая топологическая группа H-эквивалентная топологической группе Y. Тогда Y также является линделёфовой (наследственно-линделёфовой) σ-метризуемой топологической группой.*

Литература

1. Arhangel'skii A. V., Tkachenko M. G. Topological groups and related structures // Atlantis Studies in Mathematics. – Atlantis Press/World Scientific V. 1, 2008.
2. Энгелькинг Р. Общая топология. - М.: Мир, 1986.

О базисах в простраствах $(C_c^*(X), w^*)$

Трофименко Н. Н., Хмылева Т. Е.

ТГУ, Томск
e-mail: trofnadezhda99@yandex.ru

В данной работе изучается сопряженное к пространству непрерывных функций $C_c(X)$ и доказывается существование обобщенного базиса Шаудера в этом пространстве.

Пусть $C_c(X)$ – пространство непрерывных вещественнозначных функций с топологией компактной сходимости, заданных на вполне регулярном тихоновском пространстве X. База окрестностей нуля состоит из множеств вида

$$U(0, K, \varepsilon) = \{x \in C_c(X) : |x(k)| < \varepsilon, \forall k \in K\},$$

где $K \subset X$ — произвольный компакт;

Определение 1. *Пусть E – линейное топологическое пространство. Система $\{e_j\}_{j\in J}$ называется обощенным базисом Шаудера в E, если любой элемент $x \in E$ единственным образом представляется в виде суммы*

$$x = \sum_{j\in J} \alpha_j e_j, \tag{1}$$

где $\alpha_j \in \mathbb{R}$ и $|\{j : \alpha(j) \neq 0\}| < \aleph_0$ и ряд сходится безусловно.

Если под $\{\delta_x\}_{x\in X}$ мы будем понимать точечные функционалы на пространстве $C_c(X)$, действующие по формуле $\delta_x(g) = g(x)$, то справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть X – топологическое пространство, в котором любой компакт является разреженным пространством. Система $\{\delta_x\}_{x\in X}$ образует обобщенный базис Шаудера в пространстве $(C_c^*(X), w^*)$.*

Следствие 1. *Пусть S – прямая Зоргенфрея и $n \in \mathbb{N}$. Тогда система $\{\delta_x\}_{x\in S^n}$ образует обобщенный базис Шаудера в пространстве $(C_c^*(S^n), w^*)$.*

СЕКЦИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Использование функции Дирихле в математическом анализе

Понеровский Р.В.

НИ ТГУ, Томск
e-mail: king_pvromeo@mail.ru

Функцию вида

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in Q \\ 0, & \text{если } x \in R \setminus Q, \end{cases}$$

в математическом анализе называют функцией Дирихле. Легко показать, что функция Дирихле, всюду разрывная на R, периодическая, причем периодом является любое рациональное число, $D(x) = \lim_{m\to\infty}(\lim_{n\to\infty} \cos^n(\pi m! x))$, измеримая и интегрируемая по Лебегу. Для функции Дирихле не существует последовательности непрерывных функций $(f_n)_{n\in N}$, таких что $D(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$.

Традиционно на лекциях и практических занятиях по математическому анализу для демонстрации содержания теорем и определений как правило, используют удобные для восприятия непрерывные и дифференцируемые на всей области задания функции. В данной работе приводится ряд функций, демонстрирующих более корректно смысл основных понятий математического анализа. Например функции вида:

а) $f(x) = (x+a)^2 D(x) + bx$,

б) $f(x,y) = (x+a)^2 D(x+y) + (y+b)^2 D(x+y) + cx + dy$,

в) $f(x,y,z) = (x^2+y^2+z^2) D(x+y+z)$.

Данная работа является основой для учебно-методической разработки по математическому анализу для студентов Томского государственного университета.

Литература

1. В.М. Шибинский. Примеры и контрпримеры в курсе математического анализа: Учеб. пособие/В.М. Шибинский. – М.:Высш. шк.,2007. – 543 с.: ил.
2. Александрова Н.В. Из истории векторного исчисления. Изд. 2-е, испр. и доп.М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ»,2013.–272с.

Особые решения однородных дифференциальных уравнений

Клемешова А. И., Соколов Б. В.

Томский Государственный Университет
e-mail: anya-3.4@mail.ru

В работе рассматриваются дифференциальные уравнения первого порядка, не разрешенные относительно производной

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (1)$$

Задача Коши $y(x_0) = y_0$ для уравнения (1) имеет единственное решение (точка(x_0, y_0) является точкой единственности), если не существует двух интегральных кривых уравнения (1), которые бы проходили бы через точку (x_0, y_0) и имели бы в этой точке общую касательную.

Достаточные условия существования и единственности решения задачи Коши для уравнения (1) определяет следующая теорема.

Теорема 1.

Пусть функция $F(x, y, y')$ определена, непрерывна со своими частными производными в некоторой замкнутой окрестности точки (x_0, y_0, y_0') и удовлетворяет условиям:

а)$F(x_0, y_0, y_0') = 0$;

б) $\frac{\partial F(x_0, y_0, y_0')}{\partial y'} \neq 0$.

Тогда существует единственное решение $y = \varphi(x)$ задачи Коши $F(x_0, y_0, y_0') = 0$; $y(x_0) = y_0$, определенное в достаточно малой окрестности точки x_0 , для которого $\varphi'(x_0) = y_0'$

Особым решением уравнения (1) называют такое решение, соответствующая интегральная кривая которого целиком состоит из точек неединственности.

В работе рассматриваются два способа нахождения особых решений для уравнений (1): 1) с помощью нахождения p-дискриминантной кривой; 2) с помощью на-хождения огибающей семейства интегральных кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ уравнения (1). Приводятся примеры нахождения особых решений.

Литература

1. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений- Москва: КомКнига,1958.-468. с.177 п3; с.120 п4.

Дифференциальные уравнения, приводящиеся к уравнениям с постоянными коэффициентами

Степанова Е. А., Соколов Б. В.

Томский Государственный Университет
e-mail: zhenyutka@mail.ru

В работе рассматриваются линейные однородные уравнения вида

$$y^{(n)} + p_1(x)y^(n-1) + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y$$

Как известно, однородное линейное уравнение с постоянными коэффициентами всегда интегрируется в элементарных функциях. Поэтому естественно возникает вопрос о возможности сведения линейного однородного уравнения с переменными коэффициентами к уравнению с постоянными коэффициентами.

Доказывается, что если такое сведение, возможно, то только при замене независимой переменной с помощью подстановки

$$c\int \sqrt[n]{p_n(x)}dx \text{ (c=const)}$$

Рассматриваются примеры уравнений, которые при помощи этой подстановки, приводятся к уравнениям с постоянными коэффициентами.Одним из примеров является уравнение Эйлера

$$x^{(n)}y^{(n)} + a_1x^(n-1)y^(n-1) + ... + a_{n-1}x'y' + a_ny$$

где $a_1...a_n$ - постоянные вещественные числа. Это уравнение с помощью подстановки $t = \ln(x)$ или $x = e^t$ приводится к уравнению с постоянными коэффициентами.

Литература

1. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений – Издательство «Высшая школа» Москва -1967, ГЛ. VII С. 423-429

2. Матвеев Н.М. Дифференциальные уравнения - Издательство «Высшая школа» Москва -1976, С. 259-264

Конкретные отображения на области с симметрией

Бакчанина Е. М., Копанева Л. С.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: bak70rus@yandex.ru

Известна формула (типа формулы Кристоффеля–Шварца) для отображения f, переводящего верхнюю полуплоскость в счетноугольник с симметрией переноса

$$f(z) = C_1 \int\limits_{z_0}^{z} \prod_{k=1}^{n} \left(\sin \frac{a_k - \xi}{2} \right)^{\alpha_k - 1} d\xi + C_2,$$

где C_1 и C_2 – комплексные постоянные, $a_k \in (0, 2\pi)$ – прообразы вершин счетноугольника с углами $\alpha_k \pi$ из «основного периода».

Конформное отображение записано в интегральном виде

$$f(z) = C_3 \int\limits_{0}^{\operatorname{tg} \frac{z}{2}} \frac{((1 - At)(1 - Ct)(1 - Dt))^{\frac{1}{2}}}{t(1 + t^2)(1 - Bt)^{\frac{1}{2}}} \, dt + C_4$$

в случае, если счетноугольник есть верхняя полуплоскость с исключенными пятиугольниками с углами $\alpha_1\pi = 0$, $\alpha_2\pi = \alpha_4\pi = \alpha_5\pi = 3\pi/2$, $\alpha_3\pi = \pi/2$, где C_3 и C_4 – комплексные постоянные, A, B, C, D – вещественные постоянные, определяемые прообразами вершин.

Также получено конформное отображение в случае, если счетноугольник есть верхняя полуплоскость с исключенными правильными пятиугольниками и в случае, если счетноугольник есть верхняя полуплоскость с исключенными пятиугольниками с углами $\alpha_1\pi = \alpha_5\pi = \pi/2$, $\alpha_2\pi = \alpha_4\pi = 5\pi/4$, $\alpha_3\pi = 3\pi/4$.

Литература

1. Копанева Л.С. Геометрические и экстремальные задачи для отображений с симметрией переноса : диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук. 01.01.01 / Копанева Л.С.; науч. рук. Александров И.А.; Том. гос. ун-т. - Томск : [б. и.], 2003. - 85 с., ил.

2. Колесников И.А. Конформные отображения канонических областей на области с симметрией: диссертация на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук : 01.01.01 / Колесников И.А.; науч. рук. Копанева Л.С.; Том. гос. ун-т. - Томск : [б. и.], 2014. - 106 с., ил.

Семейство отображений из класса $X_{2\pi}$

Мельникова И. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: 01021994@docsis.ru

Класс $X_{2\pi}$ – это множество всех голоморфных однолистных в верхней полуплоскости $\Pi^+ = \{z \in \mathbb{C}\colon Imz > 0\}$ отображений $f\colon \Pi^+ \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих условиям:

1) область $f(\Pi^+) = D$ есть односвязная область типа полуплоскости с симметрией переноса вдоль вещественной оси;

2) $f(z + 2\pi k) = f(z) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$;

3) $\lim\limits_{Imz\to\infty}(f(z) - z) = 0$, где $Imz > 0$.

Для отображений из класса $X_{2\pi}$ получено дифференциальное уравнение типа Левнера
$$\frac{d\zeta(\tau, z)}{d\tau} = \operatorname{ctg}\frac{\lambda(\tau) - \zeta(\tau, z)}{2}$$
с начальным условием $\zeta(0; z) = z$.

При $\lambda(\tau) = \mu\tau, \mu \in \mathbb{R}$ решение этого уравнения неявно определяется равенством
$$\frac{1}{1+\mu^2}\ln\left(\mu\sin\frac{\mu\tau-\zeta}{2} - \cos\frac{\mu\tau-\zeta}{2}\right) + \frac{\mu(\mu\tau-\zeta)}{2(1+\mu^2)} =$$
$$= \frac{\tau}{2} + \frac{1}{1+\mu^2}\ln\left(-\mu\sin\frac{z}{2} - \cos\frac{z}{2}\right) - \frac{\mu z}{2(1+\mu^2)}.$$
В результате предельного перехода при $\tau \to +\infty$ получим отображение
$$f(z) = \lim_{\tau\to+\infty}(\zeta(\tau) - i\tau) = \frac{1}{\mu+i}\left(\mu z - 2\ln(\mu\sin\frac{z}{2} + \cos\frac{z}{2})\right) + \frac{2}{\mu+i}\ln\frac{1+\mu i}{2}.$$
Доказано, что полученное отображение принадлежит классу $X_{2\pi}$.

Задача о кривизне линии уровня

Борисова Я. В.

Томский государственный университет , Томск
e-mail: borisova_yana@list.ru

Для линии уровня, как образа окружности радиуса $r < 1$ при отображении $f : \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\} \to \mathbb{C}$, f - голоморфно и однолистно, с нормировкой $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, известны следующие геометрические характеристики:

1)кривизна - k_1

2)уклонение - A

3)вторая кривизна [1] - k_2

Фиксируем точку $z_0 = re^{i\alpha}$, $0 < r < 1$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 2\pi$. При $w = f(z)$ известны формулы для кривизны и уклонения линии уровня функции в точке $w_0 = f(z_0)$:

$k_1 = \frac{1}{|z_0 f'(z_0)|} Re(1 + \frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)})$ [2]

$A = \frac{Im\left(\frac{z_0^2 f'''(z_0)}{f'(z_0)} - \frac{3}{2}\left(\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2\right)}{3\left(Re\left(1+\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)\right)^2}$ [3]

В работе получена формула второй кривизны:

$k_2 = \frac{1}{|z_0 f'(z_0)|} Im\left(\frac{3}{2}\left(\frac{z_0 f''(z_0)}{f'(z_0)}\right)^2 - \frac{z_0^2 f'''(z_0)}{f'(z_0)}\right)$

Литература

1. Пешкичев Ю. Кривизна в теории поля/ Ю. Пешкичев. – [БМ]. : LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. – 95 с.
2. Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа/ Г. Полиа, Г. Сегё. – М. : Наука, 1978. – 392 с.
3. Черников В.В., Копанев С.А. Об уклонении линии уровня и их ортогональных траекторий при однолистных конформных отображениях// Сиб. мат. журн. – 1986. – т. 27, №2. – С. 193-201.

Рекурсия в последовательности Фибоначчи

Кильдякова Ю.А.

ОГБОУ «Томский физико-технический лицей», г. Томск
e-mail: juliakildyakova00@mail.ru

В настоящее время область практического применения рекурсии весьма широка. Она включает, в частности, сложные задачи численного анализа, алгоритмы трансляции, а также различные операции над списками, являющиеся необходимым аппаратом разработки современных автоматизированных систем управления.

Определение 1. *Последовательность Фибоначчи — последовательность чисел, в которой каждое следующее число в ряду получается суммированием двух предыдущих чисел.*

Формула: $f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$ для $\forall \ n \geq 3$. [1]

Определение 2. *Рекурсия — конструкция, при которой функция вызывает саму себя. [2]*

В своём проекте я познакомилась с рекурсией на примере вычисления последовательности чисел Фибоначчи и создала программу для вычисления n-ого члена последовательности.

Литература

1. Фишер Р. Последовательность Фибоначчи: приложения и стратегии для трейдеров С. 1—18
2. Босова Л.Л. Босова А.Ю.Учебник по Информатике за 9 класс // М.: БИНОМ, 2012 г.

Математические закономерности в биологии: наследование цвета глаз

Иванова В. В., Семёнова А. А.

МБОУ СОШ "Эврика-развите"
e-mail: siriys.tomsk@mail.ru

Я выбрала эту тему, так как она является очень занимательной с точки зрения теории вероятностей и статистики. Мне было интересно выяснить, как сочетается цвет глаз между собой при наследовании по данным, взятым из информационных источников и сравнить эти данные с результатами, полученными мной практическим путем.

Целью исследования было - сравнить данные о наследовании цвета глаз, взятые из информационных источников с данными, полученными опытным путем и в результате математических расчётов. Основными задачами исследования: проанализировать литературу и Интернет-источники, подобрать необходимый материал по биологии; познакомиться с основными фактами теории вероятностей [1], научиться вычислять вероятности событий с помощью классического определения; провести анкетирование обучающихся школы «Эврика-развитие»; представить полученную информацию в виде таблиц; вычислить вероятность появления того или иного цвета глаз; сравнить полученные результаты и сделать выводы.

После проделанной работы было выяснено, что полученные данные совпадают с найденными в литературе, хотя мне и не удалось проверить все варианты наследования цвета глаз из-за того, что мной было опрошено недостаточное количество человек для получения в результате работы всех возможных вариаций, то есть объём доступной мне выборки был небольшим.

В ходе работы была подтверждена гипотеза исследования: наследование цвета глаз подчиняется математическим закономерностям.

Литература

1. Бунимович Е.А., Булычёв В.А. Основы статистики и вероятность. 5-9 кл.: Пособие для общеобразоват. учреждений. – М.: Дрофа, 2004. – 288 с.

Графический метод решения задач с параметром

Морев М. С.

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
лицей при Томском политехническом университете, г. Томск
e-mail: anastacie.razina@gmail.com

Еще совсем недавно, 10-15 лет назад, задачи с параметрами встречались на вступительных экзаменах в ВУЗах с самым высоким уровнем математики, сейчас уже это элемент единого государственного экзамена. От выпускника требуется уметь мыслить аналитически, основывать свои рассуждения на математических знаниях. Недаром умение решать такие задачи считается признаком отличного знания математики.

Целью нашей работы является расширение знаний в области решения задач с параметром, изучение графического способа решения заданий, повышение интереса к задачам с параметром в целом.

Задачи, поставленные нами, являются:

1) Составить теоретическую основу, необходимую для решения заданий с параметром графическим методом;

2) Составить и разобрать задания по теме, для самостоятельной подготовки с целью укрепления материала;

3) Составить документ-справочник, систематизирующий информацию, необходимую для решения задач с параметром;

4) Спроектировать и реализовать приложение, позволяющее проверять задания с параметром.

Задачи с параметрами играют важную роль в формировании мышления и математической культуры, но их решение вызывает значительные затруднения. Также такие задачи включаются в письменный экзамен по математике многими вузами, что делает нашу тему еще более актуальной.

В результате моей работы:

• Составлен документ-справочник, включающий в теоретические и практические части по изучению решения задач с параметром;

• Повышен уровень интереса к математике, к сложным и нестандартным задачам среди параллельных классов лицея при ТПУ;

• Подготовлены к заданию 18 (С5) в ЕГЭ выпускники лицея при ТПУ;

• Разработано приложение, позволяющее проверять задания с параметром.

Банковский кредит как способ решения финансовых проблем студента

Козлов В. О.

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение лицей при Томском политехническом университете, город Томск
e-mail: anastacie.razina@gmail.com

В современном обществе в кредит можно купить бытовую технику, недвижимость или автомобиль. Сейчас кредит может получить почти каждый, но из-за финансовой неграмотности есть определенный риск, взяв кредит, только ухудшить своё финансовое положение. Среди потенциальных заемщиков особенно можно выделить студентов. Зачастую, студенту для реализации своих планов без помощи банка не обойтись.

Целью данной работы является выявление оптимального способа решения финансовой проблемы студента с помощью кредита, используя инструментарий, полученный при решении задач единого государственного экзамена.

Для реализации поставленной цели выделяются следующие задачи: • Изучить понятие сложного процента; • Составить документ-справочник, систематизирующий информацию, необходимую для решения задач с экономическим содержанием; • Смоделировать несколько финансовых проблем студента и рассмотреть их решение с помощью банковского кредитования, опираясь на реальные условия; • Для каждой модели выявить наиболее подходящее кредитное решение.

Для работы были выбраны три различные модели: • Покупка однокомнатной квартиры • Покупка автомобиля • Аренда квартиры и средние затраты в месяц. В ходе работы были разобраны финансовые предложения нескольких крупных банков г. Томска, а также предложения нескольких финансовых контор, которых в последнее время стало очень много. По каждому типу модели произведен разбор разных видов возврата денежных средств банкам.

В результате моей работы:

• Составлен документ-справочник, включающий в себя теоретическую и практическую части по решению задач с экономическим содержанием;

• Выявлено оптимальное решение для всех составленных моделей.

Проделанная нами работа показывает как на основе знаний, полученных при решении школьных задач, можно оптимально подходить к решению проблем с помощью банковского кредита.

Графический метод решения задач с параметром

Баублис Д. И., Денисов В. Г.

Муниципальное бюджетное общеобразовательное учреждение
лицей при Томском политехническом университете, город Томск
e-mail: anastacie.razina@mail.ru

Среди выпускников общеобразовательных учреждений задачи по стереометрии считаются достаточно сложными. Сложными настолько, что некоторые учащиеся на экзамене даже не приступают к решению этих задач. В данной работе речь пойдет о методе решения таких задач - о методе координат.

Метод координат используется для решения стереометрических задач, которые традиционно встречаются в экзаменах, вступительных испытаниях в вузы и различных олимпиадах. Метод координат порой позволяет прийти к правильному ответу за меньшее число шагов, что позволяет существенно сэкономить время, не теряя при этом качество логических рассуждений.

Целью данной работы являлась популяризация метода координат для нахождения углов в пространстве, а также для нахождения расстояний между геометрическими объектами в пространстве. Для реализации поставленной цели выполнялись следующие задачи:

1) Рассмотреть метод скалярного произведения.

2) Рассмотреть способы вычисления расстояния между объектами в пространстве.

3) Найти и составить задачи на применение данных способов.

4) Выявить более удобные способы для введения системы координат для различных пространственных тел.

В результате данной работы авторами были прорешаны более 30 заданий, кроме того, более 10 задач составлены самостоятельно. Весь изученный материал был систематизирован, классифицирован и опубликован в методическом пособии «Метод координат».

Данное методическое пособие можно использовать как для подготовки к экзаменам будущим выпускникам, так и учителям в качестве дополнительных материалов для курса стереометрии.

СЕКЦИЯ

ЗАДАЧИ МЕХАНИКИ: ФИЗИЧЕСКОЕ И МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

Оценки масштабов турбулентности в диффузионных пламенах с применением термографии *

Агафонцев М. В.[1], Лобода Е. Л.[1], Матвиеко О. В.[1], Рейно В. В.[2]

[1]НИ ТГУ, Томск
[2]ИОА СО РАН, Томск
e-mail: kim75mva@gmail.com

Проведено экспериментальное исследование полей температуры в диффузионных пламенах с применением термографии. В качестве топлив применялись растительные горючие материалы, спирт, бензин, керосин, дизельное топливо. Измерения проводились тепловизором JADE J530SB с использованием оптического фильтра, имеющего рабочий спектральный диапазонами 2.5-2.7 мкм. Частота съёмки процесса горения исследуемых топлив составляла 170 Гц.

Экспериментально были получены спектры изменения температуры в пламени. Установлено, что в них присутствуют характерные частоты, различные для разных видов топлив. На основе измерений температурных неоднородностей на термограммах и анализе спектров изменения температуры с применением математических преобразований, основанных на допущении подобия пульсаций термодинамических и гидродинамических параметров в пламени, даются оценки масштабов турбулентности. Сравнение результатов математических оценок масштабов турбулентности в пламени с экспериментальными данными о размерах температурных неоднородностей говорит об удовлетворительном согласовании результатов.

*Работа выполнена при поддержке Гранта Президента РФ № МД-5754.2015.1, гранта РФФИ № 15-01-00513_а, программы ОФН РАН «Фундаментальные проблемы электродинамики и волновой диагностики атмосферы».

Влияние положения источника энергии на режимы сопряженной смешанной конвекции в полуоткрытой полости [*]

Носонов И. И., Шеремет М. А.

Томский государственный университет
e-mail: nosonov_94@mail.ru

В настоящее время достаточно интенсивно проводятся теоретические и экспериментальные исследования режимов конвективного теплопереноса в областях различной геометрии при наличии локальных источников энергии [1]. Такой интерес обусловлен широтой приложений рассматриваемых задач в теплоэнергетике, электронике, строительстве.

В настоящей работе проведены численные исследования нестационарных режимов смешанной конвекции в полости с входным и выходным отверстиями и при наличии локального источника энергии постоянной температуры. Рассматриваемая область решения имеет теплопроводные стенки конечной толщины.

Для описания гидродинамики и теплопереноса использовались нестационарные уравнения Буссинеска, сформулированные в безразмерных преобразованных переменных «функция тока – завихренность – температура», а также нестационарное уравнение теплопроводности для определения температуры внутри твердых стенок. Краевая задача решена численно методом конечных разностей на равномерной сетке. Проанализировано влияние числа Ричардсона, фактора нестационарности, положения тепловыделяющего элемента и материала теплопроводных стенок на структуру течения и теплоперенос.

Литература

1. Oztop H.F., Estelle P., Yan W.M., Al-Salem K., Orfi J., Mahian O. A brief review of natural convection in enclosures under localized heating with and without nanofluids // Int. Commun. Heat Mass Transfer. – 2015. – Vol. 60. – P. 37–44.

[*] Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-6942.2015.8)

Перенос тепла по поверхности графена

Кожин Н. Е., Бубенчиков А. М.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: mulphiam@gmail.com

В данной работе рассматривается фотонный механизм передачи энергии по графеновой сети, без учета квантовых эффектов излучения с поверхности. Для простейшего фрагмента графеновой сети в линейном приближении упругих сил строится математическая модель движения атомов углерода в кристаллической структуре графена, что позволяет оценить уровень энергии C–C связи.

Без учета естественного коробления будем считать графеновый лист плоским, и поскольку это поверхностный кристалл, то атомы углерода в нем составляют идеальную гексогональную структуру. В этой структуре можно выделить внутренние узлы, в которых отдельный атом связан с тремя другими такими же атомами, и граничные узлы, в которых имеются только две ковалентные связи.

C–C связи характеризуются наличием общей орбитали у двух соседних атомов, поэтому эти связи соединяют атомы в единую сетку за счет парных взаимодействий, направленных по ребрам гексагональных элементов. Прочностные свойства графенового листа определяются именно этими связями. Поскольку температура есть мера кинетической энергии колебательного движения атомов в узлах кристаллической структуры, а упругие смещения атомов от положения равновесия в большей степени определяются C–C связями, то по характеру колебаний атомов можно сделать вполне определенные заключения о величине углерод-углеродной связи в графене. Эти же колебания и определяют передачу тепла вдоль графенового листа.

Математическое моделирование проницаемости материалов состоящих из наночастиц

Шерстобитов А. А., Бубенчиков А. М.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск
e-mail: sherstobitovalexandr@gmail.com

Известно, что промышленно добываемые и поставляемые потребителю природный и попутные нефтяные газы являются многокомпонентными смесями углеводородов, причем практически каждый компонент смеси представляет значительную самостоятельную коммерческую ценность. В топливных газах во многих случаях содержится гелий, который широко используется в промышленности и науке. Запасы гелия на Земле существенно ограничены. Поэтому природный газ необходимо разделять на компоненты [1].

Одним из перспективных методов разделения компонент природного газа является применение карбоновых фильтров, в идеале состоящих из плотноупакованных сферических наночастиц, образующих собой нанопористый фильтр. Целью работы является исследование проницаемости нанопористого углеродного фильтра, молекулами и атомами различных веществ, находящихся в газовом состоянии.

Изучение процесса взаимодействия движущейся молекулы с частицами нанопористого фильтра, основано на применении математической модели и численных методов решения задачи. Взаимодействие между отдельными молекулами определяется классическим потенциалом Леннарда-Джонса. Численное решение реализуется с помощью написанного программного кода.

Расчетами установлен предельный максимальный по величине зазор между рядами наночастиц, составляющих фильтр, необходимый для того чтобы пробные молекулы могли проходить через него, а другие, более тяжелые не проходили.

Литература

1. Rudyak V.Y., Krasnolutskii S.L. The calculation and measurements of nanoparticles diffusion coefficient in rarefied gases // J. Aerosol Science. – 2003. – Vol. 34, suppl. 1. – P. 579-580.

Влияние локальных источников на режимы естественной конвекции *

Астанина М. С., Шеремет М. А.

НИ ТГУ, Томск
e-mail: astanina.marina@bk.ru

Естественная конвекция – одно из фундаментальных физических явлений нашего мира. Изучение данного процесса привлекает внимание исследователей уже долгое время.

В настоящей работе рассматривается процесс теплопереноса в замкнутой квадратной полости с изотермическими вертикальными и адиабатическими горизонтальными стенками при наличии двух локальных источников энергии постоянной температуры. Полость заполнена ньютоновской жидкостью, вязкость которой является экспоненциальной функцией температуры.

Исследования были проведены при следующих предположениях: рабочая среда является теплопроводной жидкостью и удовлетворяет приближению Буссинеска; течение – нестационарное и ламинарное. Математическая модель построена на основе двумерных нестационарных дифференциальных уравнений в частных производных с использованием безразмерных переменных «функция тока – завихренность – температура».

Полученные уравнения с соответствующими начальными и граничными условиями решались методом конечных разностей на равномерной сетке. Разработанный метод решения был протестирован на других задачах [1].

В результате были получены распределения температуры, завихренности, изолиний функции тока, а также зависимости среднего числа Нуссельта на поверхности источников энергии от определяющих параметров. Особое внимание было уделено анализу влияния положения тепловыделяющих элементов на структуру течения и теплоперенос внутри полости.

Литература

1. Astanina M. S., Sheremet M. A., Umavathi J. C. Unsteady natural convection with temperature-dependent viscosity in a square cavity filled with a porous medium // Transport in Porous Media. 2015. Vol. 110, No. 1. P. 113–126.

*Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Минобрнауки России (задание № 13.1919.2014/K)

Нестационарные ламинарные режимы естественной конвекции в замкнутом кубическом контуре с локальным источником энергии треугольного сечения*

Гибанов Н. С., Шеремет М.А.

Томский государственный университет, г.Томск
e-mail: : fire9n@mail.ru

Процессы тепломассопереноса в исследуемой области описывались системой пространственных нестационарных дифференциальных уравнений Обербека–Буссинеска в безразмерных преобразованных переменных «векторный потенциал – вектор завихренности – температура» [1].

Численные расчеты проводились при $Pr = 0.7, Ra = 10^4 - 10^6$. Проанализировано влияние фактора нестационарности на характер распределения скорости и температуры внутри полости. Установлены особенности трехмерной постановки задачи в сравнении с данными двумерного приближения [2]. Показана динамика развития теплового факела, формирующегося над источником энергии. Получены зависимости для интегрального числа Нуссельта на поверхности тепловыделяющего элемента от времени и определяющих безразмерных комплексов.

Литература

1. Шеремет М.А. Сопряженные задачи естественной конвекции. Замкнутые области с локальными источниками тепловыделения. – Берлин: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2011. – 176 с.

2. Гибанов Н.С., Шеремет М.А. Влияние формы и размеров локального источника энергии на режимы конвективного теплопереноса в квадратной полости // Компьютерные исследования и моделирование. – 2015. – Т. 7, № 2. – С. 271–280.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ для молодых российских ученых (грант МД-6942.2015.8).

Математическое моделирование проницаемости карбоновых нанотрубок

Малоземов А. В., Бубенчиков А. М.

Томский государственный университет, г.Томск
e-mail: : night-00-hunter@rambler.ru

В настоящее время большое внимание уделяется методам очистки и подготовки природного газа. Одним из перспективных методов разделения компонент природного газа является применение карбоновых фильтров, в идеале состоящих из одинаково ориентированных карбоновых нанотрубок. В статье представлено исследование проницаемости простого элемента углеродного фильтра – открытой карбоновой нанотрубки, молекулами и атомами различных веществ, находящихся в газовом состоянии. В отношении этих графеновых структур исследуется внутренняя динамика молекул водорода, кислорода, гелия и метана. В основе математической модели лежит второй закон Ньютона, сила в котором – есть сила Ван-дер-Ваальса, определяемая через классический потенциал Леннарда-Джонса.

Полученные результаты, показывают способность карбоновых нанотрубок, установленного диаметра, отфильтровывать только целевые компоненты. Для каждой рассматриваемой частицы был установлен минимально допустимый диаметр нанотрубки. Был установлен эффект обратного вытеснения молекулы карбоновой системой. Исследование влияния длины нанотрубки на проницаемость, позволило прийти к выводу, что проницаемость элементов не зависит от их длины. В перспективе исследования планируется рассмотреть совокупное влияние системы углеродных нанотрубок на динамику частиц, и оценить проницаемость карбонового фильтра в целом.

Литература

1. Lennard-Jones, J. E. — Proc. Roy. Soc., 1924, v. A 106, p. 463.

Влияние поверхностного натяжения на интенсивность испарения жидкости в цилиндрической полости *

Кожевников Д. А., Шеремет М. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: den_linad@mail.ru

Испарение как один из процессов фазового перехода встречается во многих технологических и природных системах. Особенностью этого процесса является его реализация на свободной поверхности жидкости. Следует отметить, что поверхностные (капиллярные) силы, действующие тангенциально к свободной или межфазной поверхности жидкости, появляются при наличии неоднородности поверхностного натяжения и направлены в сторону его увеличения. Вовлекая в движение поверхность и прилегающие к ней слои жидкости, эти силы инициируют развитие объемного конвективного течения, получившего название конвекции Марангони.

Целью настоящей работы является численное моделирование конвективного теплопереноса в вертикальной цилиндрической полости в условиях слабоинтенсивного испарения со свободной поверхности. Жидкость находится в полуоткрытом вертикальном цилиндре с адиабатической нижней стенкой, на боковой поверхности задан постоянный тепловой поток, верхняя граница является открытой. Испарение осуществляется со свободной верхней поверхности.

Краевая задача сформулирована в безразмерных преобразованных переменных "функция тока – завихренность"и реализована численно методом конечных разностей. Разработанный численный алгоритм был верифицирован на тестовых задачах [1]. Исследования проведены в широком диапазоне изменения определяющих параметров.

Литература

1. Khelifi-Touhami M.S., Benbrik A., Blay D. Laminar natural convection flow in a cylindrical cavity application tothe storage of LNG // Journal of Petroleum Science and Engineering. – 2010. – Vol. 71. – P. 126–132.

*Работа выполнена в рамках реализации государственного задания Минобрнауки России(задание № 13.1919.2014/К)

Движение гелия через нанотрубку пассивированную азотом и фтором

Фридман О. Э., Бубенчиков А. М.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
e-mail: ms.friol@email.ru

В данной работе рассматривается случай, когда на краях сети в позициях атомов углерода выстраиваются атомы других веществ, в частности азота и фтора, который называется пассивацией.

Воздействие же трубки на перемещающийся атом гелия есть сумма воздействий каждого углерода кристаллической структуры, которую можно представить в виде потенциала Леннарда-Джонса:

$$\Phi = 4\varepsilon \textstyle\sum_{j=1}^{N_p} \left[\left(\dfrac{\sigma}{\rho_j}\right)^{12} - \left(\dfrac{\sigma}{\rho_j}\right)^{6} \right] \tag{1}$$

Здесь ρ – межатомное или межмолекулярное расстояние,σ,ε – параметры рассматриваемого потенциала.

В рассматриваемом случае уравнения движения молекулы гелия будут иметь вид:

$$\frac{du}{dt} = \textstyle\sum_{j=1}^{N_p} a_j \dfrac{x - x_j^0}{\rho_j}, \dfrac{dv}{dt} = \textstyle\sum_{j=1}^{N_p} a_j \dfrac{y - y_j^0}{\rho_j}, \dfrac{dw}{dt} = \textstyle\sum_{j=1}^{N_p} a_j \dfrac{z - z_j^0}{\rho_j} \tag{2}$$

$$a_j = 24 \frac{\varepsilon}{\rho_j m} \left(\frac{\sigma}{\rho_j}\right)^6 \left[2 \left(\frac{\sigma}{\rho_j}\right)^6 - 1 \right] \tag{3}$$

Расчеты показали, что открытые трубки диаметром больше 0.95 не являются проницаемыми для гелия.Пассивация трубок атомами азота и фтора оказывает незначительное влияние на динамику проходящих молекул, однако она изменяет величину окна проницаемости.

Литература

1. Бубенчиков А. М., Бубенчиков М. А.,. Потекаев А. И, Усенко О. В., Шерстобитов А. А. Проницаемость туннеля из сферических наночастиц // Вестник Томского госуни- верситета. Математика и механика. 2014. № 5(31). С. 69 – 75.

2. Dresselhaus M.S., Dresselhaus G., Avouris P. Carbon Nanotubes: Synthesis, Structure, Properties, and Applications // Berlin. Springer. 2001

Теория инерционного датчика измерения плотности нефтегазожидкостной смеси

Киселёва О. С., Бубенчиков А. М.

Томский государственный университет, г.Томск
e-mail: mystery92@mail.ru

Построена механическая модель инерционного датчика для измерения плотности газожидкостной среды. На основе теоремы о моменте количества движения для относительного движения около подвижной оси, проходящей через центр масс системы, получено определяющее уравнение для крутильных колебаний рамки расходомера. Найдено аналитическое решение полученного уравнения, на базе которого оценивается влияние плотности смеси на величину амплитуды крутильных колебаний рамки.

Реальный датчик состоит из двух одинаковых металлических трубок, в которых, как и в основной трубе, движется газожидкостная смесь. В центральной части этой системы между трубками установлены два электромагнита, которые приводят трубки в колебательное движение вокруг оси, параллельной оси трубопровода.

Зная аналитическое решение можно выявить зависимость характера колебаний от геометрических характеристик рамки и найти амплитуду колебаний в зависимости от этих же параметров, а также от значений плотности смеси и от скорости ее подачи через трубки.

Литература

1. Khudobina J., Bubenchikov A., Bubenchikov M., Matvienko O., Libin E. Numerical Simulation of Oil Pool Boundary Evolution // Advanced Materials in Technology and Construction (AMTC-2015) : AIP Conf. Proc. 1698, 060006 (2016). Doi 10.1063/1.4937861
2. Bubenchikov A.M., Bubenchikov M.A., Potekaev A.I., Libin E.E., Khudobina Yu.P. Condensed-state physics the potential field of carbon bodies as a basis for sorption properties of barrier gas systems // Russian Physics Journal. 2015. Vol. 58, № 7. P. 882–888.

Движение частицы в форме вытянутого эллипсоида вращения

Матвиенко О. В., Андропова А. О., Андриасян А. В., Мамадраимова Н. А

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
e-mail: A.O.Andropova@gmail.com

В работе проведено исследование движения неизометрических твердых частиц, имеющих форму вытянутого эллипсоида вращения в закрученном потоке. Движение мелких частиц относительно несущей жидкости достаточно мало [1]. В результате этого самые мелкие частицы движутся по винтовой траектории практически по цилиндрической поверхности. Крупные частицы, оттесняемые центробежной силой, движутся к стенкам внешнего цилиндра по конической поверхности. С увеличением скорости вращения внешнего цилиндра число витков, увеличивается, шаг винтовой линии уменьшается. С увеличением угловой скорости вращения цилиндров происходит рост значений центробежной силы.

Для мелких частиц время достижения динамического равновесия намного меньше характерного гидродинамического времени, что позволяет для анализа движения ис-пользовать модель дрейфа частиц. При этом скорость частиц определяется в предпо-ложении малости инерционных членов [2].

Скорость гравитационного осаждения не зависит от величины угла прецессии и определяется только размером и формой частицы.

Таким образом, проведенные исследования показали, что движение частиц существенно определяется их положением в потоке, и, таким образом, для создания расчетных методик сепарации и пылеулавливания необходимо учитывать этот факт.

Литература

1. Crowe C., Sommerfeld M., Tsuji Ya. Multiphase Flows with Droplets and Particles. CRC Press., 1998, 472p.
2. Матвиенко О.В., Евтюшкин Е.В. Математическое исследование сепарации дисперсной фазы в гидроциклоне при очистке вязкопластических буровых растворов //Инженерно-физический журнал. 2011. Т. 84. № 2. С. 230-238.

Влияние источников тепломассовыделения ("пожара") на дозвуковое обтекание макета здания

Алексеенко Е. М., Пахомов Ф. М.

Томский государственный университет, Томск
e-mail:osh@mail.tsu.ru

В современном мире актуальной остается проблема лесных пожаров. Интерес представляет моделирование физических процессов, происходящих при влиянии пожара непосредственно на строения, а также определение основных параметров взаимодействия газовой среды со строениями, находящимися вблизи и в центре пожара.

В данной работе, как и в [1] с использованием модели идеального невязкого совершенного газа рассматривается численное моделирование дозвукового обтекания макета здания с источниками тепломассовыделения перед зданием, на крыше здания и за зданием.

Расчеты проводились методом С.К. Годунова с использованием модификации В.П. Колгана-Н.И. Тилляевой [2] на второй порядок точности.

Сравнение с [1], где расчеты проводились по схеме с первым порядком точности, даёт незначительные отличия в результатах, при этом сокращая расчетное время.

Литература

1. Касымов Д.П. Численное моделирование обтекания преграды при наличии источников тепломассовыделения на границах / Д.П. Касымов, Ф.М. Пахомов, А.А. Шелестов // II Международная конференция «Информационные технологии в науке, управлении, социальной сфере и медицине»: сборник научных трудов. Томск, 19-22 мая 2015 г. - Томск, 2015. - С. 51-55.
2. Тилляева, Н.И. Исследование возможностей модификации В.П. Колгана численной схемы С.К. Годунова, сохраняющей аппроксимацию на произвольных расчетных сетках / Н.И. Тилляева // Технический отчет ЦИАМ № 9860. – М., 1982. – 46 с.

Воздействие малых энергетических возмущений на горение этанола

Гаар С. А., Агафонцев М. В.

Национальный Исследовательский Томский Государственный университет, Томск
e-mail: gaar-94@mail.ru

В работе приводятся результаты экспериментального исследования влияния малых энергетических возмущений на процесс горения этанола. Малыми энергетическими возмущениями являлось воздействие инфразвука с частотами от 2 до 15 Гц. В качестве источника инфразвука использовался генератор импульсов, сигнал от которого усиливался и преобразовывался в инфразвуковые колебания с помощью НЧ ГД с мягким подвесом диффузора. Эффективная мощность не превышала 25 Вт. Излучение пламени регистрировалось тепловизором JADE J530SB в спектральном интервале 2,5-2,7 мкм. Спектр изменения температуры в пламени определялся с помощью быстрого преобразования Фурье по методике [1].

Установлено изменение высоты пламени при инфразвуковом воздействии, амплитуды температуры на определенных частотах в спектре изменения температуры. При воздействии инфразвука с частотой 4.0, 4.6, 4.8 Гц установлено, что амплитуда пульсации температуры с частотой воздействия кратно увеличивается.

В работе [2] делается авторами предположение о связи пульсаций температуры с режимом течения в пламени и масштабами турбулентных вихрей. Полученные экспериментальные данные позволяют сделать вывод, что при воздействии малых энергетических возмущений происходит изменение режима течения в пламени, что проявляется в виде уменьшения высоты пламени и изменения спектра температуры в нем.

Литература

1. Loboda E.L., Reyno V.V., Vavilov V.P. The Use of Infrared Thermography to Study the Optical Characteristics of Flames from Burning Vegetation // Infrared Physics and Technology 67 (2014). P. 566-573.

2. E.L. Loboda, O.V. Matvienko, V.P. Vavilov, V.V. Reyno, Infrared thermographic evaluation of flame turbulence scale // Infrared Physics and Technology 72 (2015) 1–7.

Теплообмен закрученного потока диссоциирующего газа

Горбатов Д. А., Матвиенко О. В.

Национальный Исследовательский Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: Trellini@yandex.ru

Для описания структуры потока используются двумерные осесимметричные уравнения Рейнольдса. Исследования характеристик турбулентности осуществлялось с использованием двупараметрической модели, адаптированной Джонсом и Лаундером для расчета течений с низкими числами Рейнольдса. При моделировании теплопереноса и химического реагирования используются уравнение теплопроводности и диффузии реагента с учетом протекающей в потоке реакции.

Рассмотрим результаты численного исследования влияния закрутки на теплообмен эндотермически реагирующего потока. Вблизи от входа в трубу теплоотдача растет с закруткой, а при $x > x_1$ – уменьшается. На достаточном удалении от входа $x > x_2$ наблюдается восстановление числа Нуссельта Nu до значений, характерных для прямоточных потоков. С увеличением интенсивности закрутки $Ro = (\omega d)/(2u_{in})$ интенсифицируется прокачка свежего, еще не разложившегося реагента около горячей стенки, что в свою очередь приводит к повышению скорости химической реакции и, следовательно, функции теплопоглощения. На участке, где силы трения начинают преобладать над центробежными, происходит торможение потока у стенки, что приводит к оттоку из периферийной области в приосевую, причем интенсивность оттока увеличивается с закруткой, поэтому распределение температуры в сечении становится более равномерным, среднерасходная температура увеличивается, а тепловой поток от стенки уменьшается. С увеличением интенсивности закрутки $Ro = (\omega d)/(2u_{in})$ на участке значительного преобладания центробежных сил происходит увеличение коэффициента теплоотдачи, на участке вырождения закрутки – уменьшение. Заметим, что обусловленная закруткой интенсификация теплообмена на начальном участке течения сохраняется при высоких $Re(\rho u_{in} d)/\mu$ на большем расстоянии от входа в трубу. Поэтому повышение эффективности использования закрученных потоков связано с увеличением области с преобладанием центробежных сил.

СЕКЦИЯ

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ, ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ И ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ВЫЧИСЛЕНИЯ

Исследование модели вирусного заболевания с применением численных методов

Давыдова Ю. А., Меркулова Н. Н.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: kawade@mail.ru

В настоящее время в иммунологии и медицине невозможно обойтись без математического моделирования [1], [2].

В данной работе рассматривается простейшая модель вирусного заболевания, описываемая системой из пяти обыкновенных дифференциальных уравнений, в которой изучается изменение концентраций антигенов - V(t), антител - F(t), плазмоклеток - C(t), массы пораженного органа - M(t) и лимфоцитов - B(t) с течением времени.

Для определения параметров модели система приведена к безразмерному виду. Получены стационарные решения и исследована их устойчивость. Найдены неравенства, с помощью которых можно выбирать параметры модели. Доказано, что система не является жесткой. Для ее численного решения применялись одношаговые методы Рунге - Кутты и метод Эйлера, обладающие условной устойчивостью.

Результаты оформлены в виде графиков. Проведено сравнение результатов между собой. Найдена относительная погрешность. Показано, что используемые методы позволяют уменьшить относительную погрешность, если увеличить число N - узлов сетки.

Литература

1. Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. — М.: Наука, 1985 г., С.240.
2. Бейли Н. Математика в биологии и медицине / пер. с англ. Е.Г. Коваленко. – М.: Издательство "МИР" , 1970 г.

Применение системы Mathematica в математическом анализе

Пчёлкина Д. Е., Зюзьков В. М.

ТГУ, Томск
e-mail: pchyolkina1993@mail.ru

Система Mathematica известна как мощное вычислительное приложение [1, 2].

В данной работе рассматривается вопрос о применении системы Mathematica в математическом анализе, в частности решение типичных задач. К таким задачам относятся [3]:

- нахождение пределов и предельных множеств;
- полные и частные производные различных порядков, в общем случае от функций нескольких переменных;
- вычисление первообразных;
- численное и символьное интегрирование, в том числе нахождение кратных интегралов и вычисление с их помощью площадей и объемов;
- изучение сумм Римана;
- нахождение критических точек и локальных экстремумов для функции нескольких переменных.

Система Mathematica позволяет типичные задачи решать достаточно легко, давая возможность пользователю больше внимания уделить творчеству. Подготовлено учебно-методическое пособие, которое описывает наиболее эффективные способы решения выше перечисленных задач. Это пособие полезно для студентов, изучающих математический анализ.

Литература

1. Wolfram Mathematica [Электронный ресурс]. – URL: http://www.wolfram.com/mathematica (дата обращения 23.03.2016).

2. Зюзьков В.М. Начала компьютерной алгебры. – Томск: Изд-во Том. ун-та, 2015. – 127с.

3. Eugene Don. Shaum's Outline of Mathematica, 2ed. - McGram Hill Professional, 2009 - 384с.

Исследование модели морфогенеза растений на адаптивных сетках

Уколов Р.Ю., Меркулова Н.Н.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: roman_ukolov@bk.ru

В данной работе изучается математическая модель биологии типа "реакция-диффузия" [1], которая задаётся системой двух дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных параболического типа с начальными и граничными условиями.

Физически задача описывает реактор с непроницаемыми стенками заданной длины. В начальный момент времени известны начальные концентрации реагирующих веществ.

Параметры модели подбираются путём исследования на устойчивость стационарных решений упрощённой системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями.

Для решения дифференциальной задачи применяется вариационный способ построения адаптивных сеток [2]. Дифференциальная задача заменятся разностной, которая затем решается итерационным методом с прогонкой [3].

Проводится вычислительный эксперимент с использованием адаптивных сеток при различных значениях параметров, управляющих сеткой. Найдены оптимальные значения параметров. Проведено сравнение полученных результатов с результатами на неподвижной сетке. Доказано, что адаптивные сетки дают лучший результат.

Литература

1. Романовский Ю. М. Математическая биофизика / Ю. М.Романовский, Н. В.Степанова, Д. С.Чернавский – М.: Наука, Глав.ред.физ.-мат.лит., 1984. – 304 с.

2. Дмитриева И.В., Каниметов К.А., Саранча Д.А., Метод подвижных сеток в задаче моделирования миграции леммингов // Численное моделирование в проблеме окружающей среды/Фрунзе: Илим, 1989. С. 109–129.

3. Рихтмайер Р., Мортон К. Разностные методы решения краевых задач. - М.: Мир, 1972.- 420с.

Использование сплайн-функций для увеличения изображений

Гейцман Р. Ю., Федорова О. П.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: gru04203@gmail.com

Каждое цифровое изображение представляет собой сетку пикселей (называемых узлами) -цветных точек размещенных друг от друга на фиксированном расстоянии. Увеличение изображения предполагает размещение исходного изображения, но на более плотной сетке, в которой находится большее количество узлов. Проблемой является определение цветов новых пикселей, помещенных между исходными узлами. Как правило для этого используют интерполяцию. Среди интерполяционных подходов можно выделить сплайн – аппроксимацию. Данный способ аппроксимации прост в реализации, эффективен и показывает отличные практические результаты.

Сплайн — функция, область определения которой разбита на конечное число промежутков фиксированной длинны, на каждом из которых сплайн совпадает с некоторым алгебраическим многочленом. Порядок сплайна есть максимальная степень из использованных многочленов. Разность между степенью сплайна и получившейся гладкостью называется дефектом сплайна. Полиномы (и их производные в некоторых случаях) должны быть непрерывными на границах промежутков.

Для определения цветов добавляемых пикселей использовались локально-аппраксимационные сплайны третьего порядка с дефектом 1, точные на кубических многочленах. Значения базисных сплайнов в различных точках промежутка высчитывалось заранее, что позволяло уменьшить общее время вычисления. Использование различных коэффициентов сплайна также влияет на качество увеличенного изображения. Разрабатываемый подход был применен к увеличению цифрового изображения.

Литература

1. Завьялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завьялов, Б. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко; Под ред. Н. Н. Яненко. - М. : Наука, 1980. - 350 с.
2. Гонсалес Р. К. Цифровая обработка изображений / Р. Гонсалес, Р. Вудс ; пер. с англ. под ред. П. А. Чочиа. - М. : Техносфера, 2006. - 1070 с.

Весовые коэффициенты квадратурных формул Соболева *

Маслов К. А.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск
e-mail: elzarion.des@gmail.com

Квадратурные формулы с регулярным пограничным слоем введены С. Л. Соболевым [1], им же установлено свойство асимптотической оптимальности таких формул для функций из пространства $L_2^{(m)}$. Дальнейшие исследования [2] были распространены на пространства $W_p^{(m)}$, $p \in (1, \infty)$. Данная работа посвящена вычислению весовых коэффициентов одномерного аналога таких формул

$$\int\limits_a^b f(x)dx \approx h\left[\sum_{i=0}^{m-1+t} D_i f(ih) + \sum_{i=m+t}^{N-1} f(ih) + \right.$$
$$\left. + \sum_{i=0}^{m-1+t} (1 - D_i) f((N+i)h)\right], \quad h = \frac{b-a}{N}. \qquad (1)$$

Формула (1) имеет пограничный слой – множество узлов $x_i = ih$, для которых $D_i \neq 1$: левосторонний внутренний ($x_i \in [a, b]$) и правосторонний внешний ($x_i \notin [a, b]$). Формула точна на многочленах степени m. Коэффициенты составной формулы (1) могут быть найдены путем решения системы линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=0}^{m-1} D_i i^k = \frac{B_{k+1}(m)}{k+1}, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \qquad (2)$$

где $B_{k+1}(m)$ – значение многочлена Бернулли в точке m. Система (2) имеет квадратную матрицу Вандермонда при $t = 0$ и, следовательно, единственное решение. Ранг матрицы равен m при любом t. Решается проблема наличия отрицательных коэффициентов D_i при значениях $m \geq 9$ путем варьирования значений t свободных переменных при $t > 0$. Составлена программа на языке C++.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

2. Корытов И.В. Экстремальная функция линейного функционала в весовом пространстве Соболева // Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2011. № 2(14). С. 5 – 15.

* Работа выполнена за счет средств субсидии в рамках реализации Программы повышения конкурентоспособности НИ ТПУ.

Реализация метода Зейделя с красно-черным упорядочиванием для численного решения уравнения конвекции и диффузии

Грудович Л. Е.

Томский государственный университет, г. Томск
e-mail: lio00167@yahoo.com

Одна из основных задач вычислительной математики является решение систем линейных алгебраических уравнений. Такие задачи встречаются еще в египетских и вавилонских рукописях II веке до н. э., а также в трудах древнегреческих, китайских и индийских мудрецов. Система линейных алгебраических уравнений вида $Ax = b$ возникает, например, при разностной аппроксимации дифференциальных уравнений. Эти уравнения описывают процессы различных областей химии, физики, биологии и др.

В данной работе рассматривается численное решение уравнения конвекции и диффузии в единичном квадрате с граничными условиями первого рода:

$$U\frac{\partial\Phi}{\partial x} + V\frac{\partial\Phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(G\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(G\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right) + S; \Phi|_\Gamma = \varphi.$$

Функции $U, V, G > 0$ непрерывно дифференцируемые внутри и на границе области исследования, φ – непрерывная функция, определенная на границе Г.

Построение дискретного аналога дифференциального уравнения, а именно системы линейных алгебраических уравнений осуществляется методом конечных разностей. Полученная в результате система линейных алгебраических уравнений решается методом Зейделя на многопроцессорной ЭВМ с распределенной памятью. В параллельной реализации метода Зейделя используется обход узлов вычислительной сетки в шахматном порядке (красно-черное упорядочивание).

Работоспособность полученной программной реализации метода Зейделя проверена на задаче, когда коэффициенты в уравнении и решение имеют вид: $\Phi(x, y) = x^2 y, U = V = G = 1, S = 2xy + x^2 - 2y$. Результаты сравнения показали, что метод Зейделя с красно-черным упорядочиванием повторяет процесс сходимости последовательного алгоритма. Вычисления выполнялись с точностью 10^{-5}, контроль сходимости метода выполнялся по нормам ошибки и невязки.

Параметризация тепло- и влагообмена в подстилающей поверхности для мезомасшабной модели *

Терентьева М. В., Старченко А. В.

Томский государственный университет, г. Томск
e-mail: mariya-terenteva@mail.ru

Рассматривается мезомасштабная модель атмосферы [1], включающая в себя трехмерные нестационарные уравнения гидротермодинамики атмосферного пограничного слоя с однопараметрической параметризацией турбулентности, схемой микрофизики влаги Кесслера, параметризацией длинноволновой и коротковолновой радиации, а также адвективного и скрытого потоков тепла в атмосфере и на границе ее взаимодействия с подстилающей поверхностью.

Для разрабатываемой модели рассмотрены два подхода к моделированию тепло- и влагообмена в подстилающей поверхности. Первый подход основан на решении одномерного уравнения теплопроводности почвы от поверхности Земли, на которой известно значение теплового потока, до некоторой фиксированной глубины, температура которой полагается известной и не меняющейся во времени. Во втором подходе используется схема параметризации ISBA, разработанная Noilhan и Planton [2], включающая обыкновенные дифференциальные уравнения для теплосодержания почвы, содержания влаги в почве.

Проведен анализ и визуализация расчетов моделирования по трехмерной мезомасштабной модели с использованием подходов, описанных выше. Использованы данные из архива погода сайта rp5.ru и данные наблюдений TOR-станции Института оптики атмосферы СО РАН.

Литература

1. A. V. Starchenko, Mathematical modelling of atmospheric processes above an industrial centre/ A. A. Bart, N. N. Bogoslovskiy, E. A. Danilkin, M. V. Terentyeva// Proceedings of SPIE, 2014, Vol. 9292, 929249-1.
2. J. Noilhan, The ISBA land surface parameterisation scheme/ J.-F. Mahfouf // Global and Planetary Change, 13 (1996), pp. 145-159.

*Работа выполнена по Государственному Заданию Министерства образования и науки РФ, № 5.628.2014/К.

Импортирование сеточных данных из предпроцессора "Gambit"для решения многомерных уравнений газовой динамики *

Кирюшкин А. Е., Миньков Л. Л.

НИ ТГУ, Томск
e-mail: sashakir94@mail.ru

Современные задачи механики сплошных сред предполагают в основном двумерную или трехмерную постановку. Количество узлов в области решения ограничивается производительными мощностями компьютерной техники, на которой ведется соответствующий расчет, и требуемой точностью получаемого решения. Имея ограниченное количество узлов, вычислитель волен выбирать их расположение.

Распределение узлов, или, что тоже самое, построение вычислительной сетки, вносит значительный вклад в точность полученных результатов и порой может занимать значительную часть времени. Зачастую, вычислительная область имеет сложную геометрию. Геометрически сложные области покрываются неструктурированными сетками.

Для построения вычислительных сеток для заданных областей существуют различные пакеты программ. Одной из таких является программа "Gambit" [1]. При экспортировании расчетной сетки из этой программы создается файл, в котором содержится вся информация о расчетной сетке: точки, грани, ячейки и граничные условия на гранях. В данной работе рассматриваются структура этого файла, интерфейс для считывания необходимой информации о расчетной сетке из него и организация вычислений для решения уравнений газовой динамики в геометрически сложных областях.

Литература

1. Gambit Version 2.3 User's Guide
2. Van Leer B. Flux-Vector Splitting for the Euler Equations // Lecture Notes in Physics. – 1982. – V.170. – P.507-512.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания № 10.1329.2014/K.

Исследование задачи о разрушении плотины с учетом рельефа дна

Потоцкая А. А., Михайлов М. Д.

НИ ТГУ, г. Томск
e-mail: bubuzyonok@yandex.ru

Задача о разрушении плотины описывается в рамках модели идеальной несжимаемой жидкости в канале, продольный размер которого много больше его поперечного сечения. Жидкость имеет постоянную температуру и находится в поле сил тяжести. Такая модель представляется уравнениями мелкой воды [1].

Рассматривается разрушение плотины над уступом дна в горизонтальном канале длины L. Процесс движения жидкости описывается системой дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими начальными и граничными условиями. Образование гидродинамического разрыва в данном процессе обусловлено выбором начальных и граничных условий.

Численное решение задачи с помощью разностной схемы Лакса-Фридрихса представлено в виде графиков. Их анализ и сравнение показывают, что полученные результаты качественно совпадают с результатами из [1]. Относительная погрешность полученных результатов составляет около 12%.

Далее изучаются: усложнение рельефа дна и распространение примеси в водном потоке. Показано, что качественные особенности исследуемого явления сохраняются. Следовательно, решение можно находить по данной схеме и с более сложным рельефом и использовать подобные модели для описания процесса распространения загрязнения.

Литература

1. Чуруксаева В. В., Михайлов М. Д. Численное моделирование потока жидкости над рельефом дна//Вестник Томского государственного университета. Математика и механика. 2014. №1. С. 51-60.

Изучение псевдопростых чисел Люка

Тиней Р. И., Зюзьков В. М.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: yuudai.fair@gmail.com

Последовательность чисел Люка определяется путём фиксирования двух целых параметров p и q, для которых $p^2 - 4q > 0$ и не являются точным квадратом. Если $p = 1$ и $q = -1$, то последовательность чисел Люка превращается в последовательность чисел Фибоначчи.

Теорема 1. *(свойство 1):для простых чисел вида $n = 5k \pm 2$, независимо от значений p и q, (n+1)-ое число Люка делится на n.*

Составные же числа, для которых указанная делимость также выполняется, называются псевдопростыми числами Люка. Псевдопростых чисел Люка бесконечно много. Для простых чисел выполнено также свойство, о котором говорит малая теорема Ферма (свойство 2). В работе с помощью системы Wolfram Mathtematica проверяется, является ли одновременное выполнение свойств 1 и 2 тестом на простоту. Для чисел Фибоначчи проверка до 10000000000 показала, что гипотеза не опровергается. Для других видов чисел Люка найдены 6 вариантов p и q, для которых гипотеза так же не опровергается, но проверка проделана только до 10000000. Кроме того, (1) исследуется распределение псевдопростых чисел Люка для 6 вариантов и (2) для данного n найдены аппроксимации количества пседвопростых чисел Люка, не превосходящих n.

Литература

1. Крэндал Р., Померанс К . Простые числа:Криптографические и вычислительные аспекты // М. :УРСС: Книжный дом ЛИБРОКОМ. 2011.с. 644.
2. Ribenboim P. The New Book of Prime Number Records. //Springer-Verlag.1996. p. 541.

Об одном методе решения задачи Стефана для уравнения теплопроводности *

Алипова К. А., Богословский Н. Н.

НИ ТГУ, Томск
e-mail: ksusha_ast@mail.ru

В данной работе рассмотрен вопрос построения математической модели промерзания влажного грунта. Подобные модели широко применяются в метеорологии в глобальных моделях численного прогноза погоды, так как тепловые процессы, происходящие в почве, значительно влияют на формирование поверхностных потоков тепла, и, следовательно, на физические процессы, происходящие в приземном слое атмосферы.

Задача Стефана возникает при решении уравнений диффузии, когда происходит фазовый переход вещества из одного состояния в другое и в модели необходимо учитывать положение границы фазового перехода в каждый момент времени.

В статье рассмотрен и реализован неявный абсолютно устойчивый численный метод для решения поставленной задачи Стефана.

Литература

1. R.M. Furzeland, A comparative study of numerical methods for moving boundary problems // J. Inst. Math. Appl. 26 (1980), p. 411 - 429.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-6896.2015.5.

К вопросу о математическом моделировании структуры сигнала

Сайнакова И. С.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: ira.saynakova@mail.ru

Сигналом может быть любой физический процесс, представленный функцией времени, который характеризуется тремя основными параметрами: амплитудой, частотой и фазой. Все сигналы подразделяются на аналоговые ($S(x), x \in [a, b]$) и цифровые, которые моделируются сеточной функцией ($S(x_i), i = \overline{0, N}$). Математические преобразования сигнала позволяют выявить некоторые его свойства, неявно содержащиеся в его исходном виде. Используя представление функции $S(t), t \in [-\pi, \pi]$ тригонометрическим рядом Фурье периодический негармонический сигнал моделируется в виде линейной комбинации гармоник, что позволяет определить амплитудный и фазовый спектры сигнала. Однако применение Фурье-анализа затруднено для нестационарных сигналов с особенностями из за не локальности носителей базиса Фурье. Теория вейвлетов, появившаяся в середине 80-х годов XX века, благодаря построению полной системы ортогональных функций с локальным носителем, способных к сдвигу и масштабированию, сделала возможным трехмерное моделирование сигналов [1], [2]. В работе рассматриваются примеры применения анализа Фурье и вейвлет анализа для одномерных сигналов.

Литература

1. Добеши И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – М. : РХД, 2001.
2. Чуи К. Введение в вейвлеты.М.: Мир, 2001.
3. Воробьев В. И. Теория и практика вейвлет-преобразования / В. И. Воробьев, В. Г. Грибунин – СПб. : ВУС, 1999.
4. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002.
5. Блаттер К. Вейвлет-анализ.Основы теории. М.:Техносфера, 2004.
6. Яковлев А.Н. Введение в вейвлет-преобразования: Учеб. пособие. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2003. – 104 с.

Погрешность вычисления определенных интегралов по формулам с регулярным пограничным слоем *

Зобнина А. А.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск
e-mail: aaz47@tpu.ru

Работы, посвященные квадратурным и кубатурным формулам с регулярным пограничным слоем, введенных С. Л. Соболевым, носят, в основном, теоретический характер и рассматривают вопросы представления функционалов погрешности в различных функциональных пространствах [1], [2]. Крайне мало работ, посвященных вычислениям с использованием этих формул. Данная работа посвящена вычислению определенных интегралов по формуле с левосторонним внутренним ($x_i \in [a, b]$) и правосторонним внешним ($x_i \notin [a, b]$) пограничным слоем – множеством узлов $x_i = ih$, для которых весовые коэффициенты $D_i \neq 1$

$$\int_a^b f(x)dx \approx h \Big[\sum_{i=0}^{m-1} D_i f(ih) + \sum_{i=m}^{N-1} f(ih) + \\ + \sum_{i=0}^{m-1} (1 - D_i) f((N+i)h)\Big], \quad h = \frac{b-a}{N}. \tag{1}$$

Формула (1) является одним из представителей семейства формул с регулярным пограничным слоем по заданному отрезку, точных на многочленах заданной степени. Вычисления проводились для определенных интегралов, числовые значения которых известны, и абсолютные и относительные погрешности можно определить. Рассматривалось поведение погрешностей при изменении параметров квадратурной формулы (1): степени интерполяционного многочлена m, числа узлов N.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.

2. Корытов И.В. Функция, представляющая функционал погрешности кубатурной формулы в пространстве Соболева // Известия Томского политехнического университета. 2013. Т. 323. № 2. С. 21-25.

*Работа выполнена за счет средств субсидии в рамках реализации Программы повышения конкурентоспособности НИ ТПУ.

Сравнение составных квадратурных формул, точных на многочленах равных степеней *

Соколова Е. В.

Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Томск
e-mail: evgenia.s96@mail.ru

Кубатурные формулы с регулярным пограничным слоем, согласно С. Л. Соболеву [1], обладают свойством асимптотической оптимальности на функциях из пространства $L_2^{(r)}$, т. е. при рассмотрении шага интегрирования как бесконечно малой приближаются к оптимальным. Ведутся работы по исследованию на функциях из других пространств, в том числе весовых [2].

В практике приближенных вычислений на результат влияют дополнительные факторы. Среди них, точность промежуточных вычислений, например, значений функции в точке или весовые коэффициенты, а также погрешность округления. В данной работе сравниваются вычисления по составным квадратурным формулам Ньютона – Котеса при $m = 2$ (Симпсона) и $m = 3$ («трех восьмых») с вычислениями по формулам с регулярным пограничным слоем, точных на многочленах тех же степеней. Порядок производной, характеризующей пространство r и степень многочленов, на которых точны квадратурные формулы, связаны соотношением $m = r - 1$. Формулы с регулярным пограничным слоем, точные на многочленах четных степеней, так же как и формулы Ньютона – Котеса,обладают свойством точности на многочленах степени $m + 1$. Отметим, что составные формулы прямоугольников и трапеций совпадают по своей структуре с формулами с регулярным пограничным слоем при $m = 0$ и $m = 1$.

Литература

1. Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. М.: Наука, 1974.
2. Корытов И.В. Представление функционала погрешности кубатурной формулы в весовом пространстве Соболева // Вычислительные технологии. 2006. Т. 11. № S4. С. 59 - 66.

*Работа выполнена за счет средств субсидии в рамках реализации Программы повышения конкурентоспособности НИ ТПУ.

Монотонные схемы высокого порядка аппроксимации для решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии, построенные на основе кубических весовых сплайнов *

Семёнова А. А.

НИ ТГУ, Томск
e-mail: siriys.tomsk@mail.ru

Цель данного исследования состоит в разработке алгоритма решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии с использованием монотонных разностных схем высокого порядка аппроксимации на основе сплайн-функций.

В данной работе были исследованы методы построения схем высокого порядка аппроксимации для численного решения уравнения переноса. Основными требованиями к предъявляемым решениям были монотонность и физическая правдоподобность. Выполнения этих требований удалось добиться при использовании монотонизаторов. Была изучена схема ENO [1], которая позволяет получать аппроксимацию по пространству до 6-ого порядка. Также была рассмотрена схема MUSCL [2]. На основе этой схемы была построена своя, использующая весовой кубический сплайн. Теоретические исследования показывают, что схема с применением сплайна даёт более точные результаты. В ходе численных экспериментов этот факт был подтверждён: из всех рассматриваемых схем именно схема со сплайном дала наименьшую погрешность.

Таким образом поставленная цель была решена. В ходе работы была построена монотонная схема высокого порядка аппроксимации для решения нестационарного уравнения конвекции-диффузии, основанная на кубическом весовом сплайне.

Литература

1. Chi-Wang Shu. Essentially non-oscillatory schemes for hyperbolic conservation laws // Preprint of Division of Applied Mathematics. BrownUniversity. 1996.

2. M. Torrilhon and M. Cada. Compact third order limiter functions for Finite-Volume-Methods . J. Comput. Phys., 2009.

*Работа выполнена по Государственному Заданию Министерства образования и науки РФ, №5.628.2014/К.

Численное интегрирование «неберущихся» интегралов

Адаричев В. С.

Томский Государственный Университет
E-mail: avs442@math.tsu.ru

Известно что имеется ряд интегралов от элементарных функций, не выражающихся через элементарные функции и играющих важную роль как в самом математическом анализе так и в его разнообразных приложениях. Часто на практике требуется вычислить определенный интеграл от такой функции. Некоторые интегралы используются настолько часто что получили своё название, например интеграл Пуассона, интегральные синус, косинус, логарифм и другие функции. Такие интегралы, не выражающиеся через элементарные функции, называют «неберущиеся» [1].

Значение таких интегралов на практике можно вычислять используя численные методы, например левых и правых прямоугольников, трапеций, методом Монте-Карло и другими [2].

Целью работы является применение методов численного интегрирования к «неберущимся» интегралам .

Методы прямоугольников и трапеций основываются на определении интеграла Римана и на свойстве аддитивности определенного интеграла. Метод Монте-Карло основывается на геометрическом смысле вероятности [2].

В работе были реализованы методы прямоугольников, трапеций и метод Монте-Карло, и применены к интегралу Пуассона, интегральным синусу, косинусу, логарифму. Результаты численного интегрирования совпадают с результатами в пакете Wolfram Mathematica.

Литература

1. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа т.1 /- М: Дрофа, 2003.-703 с.
2. Вержбицкий В.М. Численные методы : Математический анализ и обыкновенные дифференциальные уравнения ./ -М: Высшая школа, 2001.- 385 с.

Численное решение уравнения теплопроводности с использованием многопроцессорной вычислительной техники

Лещинский Д. В., Данилкин Е. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: 360flip182@gmail.ru

В настоящее время научный прогресс не стоит на месте. Применение современной высокопроизводительной вычислительной техники в научных исследованиях дало новый толчок человечеству в процессе расширения границ познания. Современные научные исследования основаны на крайне сложных вычислительных процессах, выполняемых на многопроцессорных ЭВМ.

Одной из современных задач, играющих важную роль в развитии таких областей как ракетная техника, авиация, энергетика, в частности ядерная энергетика, является задача о процессе теплопроводности. Многие задачи этого направления не поддаются аналитическому решению и единственная возможность их теоретического анализа – получение численного решения. Однако в ходе решения подобных задач возникает ряд проблем, связанных с объёмом обрабатываемой информации, что в свою очередь влечет к значительному увеличению промежутка времени, выделяемого для решения поставленной задачи. Использование многопроцессорной вычислительной техники позволяет значительно сократить время обработки огромных массивов информации в сравнении с использованием последовательных вычислительных систем.

В данной работе проводится сравнительный анализ численногорешения задачи теплопроводности с использованием многопроцессорной вычислительной техники и реализации решения этой же задачи в последовательном однопроцессорном варианте. Решение исходной дифференциальной задачи осуществлялось методом конечных разностей на равномерной декартовой сетке с использованием явной разностной схемы [1].

Литература

1. Старченко А. В. Методы параллельных вычислений / А. В. Старченко, В. Н. Берцун. – Томск : Изд-во Том.ун-та, 2013. – 225 с.

Исследование математической модели "хищник-жертва"с учётом внутривидовой конкуренции

Чу А. Р., Михайлов М. Д.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: chu.antoniy@gmail.com

Дается качественный анализ математической модели хищник-жертва Базыкина-Свирежева [1-3] с учётом внутривидовой конкуренции, представляющую собой задачу Коши для системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений. Проводится анализ устойчивости точек нетривиального равновесия в зависимости от параметров модели

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = u - uv - c_1 u^2, \\ \dfrac{dv}{dt} = -\gamma * v + uv - c_2 v^2, \\ u(0) = u_0, \\ v(0) = v_0. \end{cases}$$

Литература

1. Апонин Ю. М., Апонина Е. А. Математическая модель сообщества хищник — жертва с нижним порогом численности жертвы // Компьютерные исследования и моделирование. — 2009. — Т. 1. — № 1. — С. 51–56.

2. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. Москва-Ижевск: Институт компьютерных технологий, 2003. — 368 с.

3. Балыкина Ю. Е., Колпак Е. П. Математические модели функционирования фолликула щитовидной железы // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10: Прикладная математика. Информатика. Процессы управления. — 2013. — № 3. — С. 20–31.

Решение дифференциальных уравнений с помощью ЭВМ

Бледнова Е. С.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: coffee_pele@yahoo.com

В настоящее время дифференциальные уравнения (д.у.) и связанные с ними задачи широко применяются в различных областях науки. Решения д.у. можно найти, используя аналитические и численные методы.

Часто нахождение аналитического решения д.у. оказывается гораздо труднее, чем численное. А в некоторых случаях аналитическое решение может не существовать.

Целью работы является знакомство с методами решения д.у. на ЭВМ.

Аналитическое решение можно получить, например, с использованием пакета Maple. Для этого используется встроенная команда dsolve [1].

Численное решение конечно-разностным методом основывается на аппроксимации дифференциального оператора и граничных условий их разностными аналогами. Переход от дифференциальной задачи к дискретной модели разбивается на две стадии. На первой стадии производится замена непрерывной области разностной сеткой. На второй стадии строятся дискретные аналоги д.у. и входных данных [2].

Этот метод был реализован для решения одномерного уравнения теплопроводности. Результаты численного решения сравнивались с результатами аналитического. Аналитическое решение получено в Maple, а численное в Pascal-программе.

Литература

1. Савотченко С. Е., Кузьмичева Т. Г. Методы решения математических задач в Maple. Белгород: Белаудит, 2001. – 116 с.
2. Самарский А. А., Михайлов А. П. Математическое моделирование: Идеи. Методы. Примеры. М.: Физматлит, 2001. - 320 с.

Предсказание метеоусловий на основе данных измерений метеостанции WXT-520

Карпюк А. А.

ТГУ, Томск
e-mail: alyonka.karpyuk@gmail.com

Мониторинг и прогнозирование погодных условий было и остаётся актуальной задачей в современном мире. Состояние метеопараметров в нижнем слое атмосферы имеют существенное значение в экономике, авиации, строительстве, сельском хозяйстве, экологии и др., так как планирование и проведение различных видов мероприятий и работ во многом зависит от погодных условий.

Мониторинг осуществляется приборами, измеряющими давление, температуру и влажность воздуха, силу и направление ветра, и прочие метеорологические элементы. Данные измерений с приборов собираются в архивы и могут быть отображены в режиме реального времени. Одним из таких приборов является метеостанция WXT-520. Поставляемый фирмой Vaisala универсальный метеокомплекс WXT-520 в настоящее время является единственным полностью интегрированным прибором без движущихся деталей. С использованием этого прибора можно легко измерить скорость и направление ветра, атмосферное давление, температуру, количество осадков и относительную влажность. Преимуществом использования данных измерений метеостанция WXT-520 является тот факт, что данные измерений метеостанций сети Гидрометцентра РФ доступны с шагом по времени 3-6 часов, а метеостанции WXT-520 – с шагом 10 секунд.

Прогнозирование погодных условий осуществляется, как правило, на основе математической модели. Существует несколько подходов к моделированию. В работе предлагается использовать метод «Linear prediction». Этот метод можно использовать для предсказания значений по имеющимся данным наблюдений. Данный метод был применен к данным измерений, полученным с использованием метеостанции WXT-520, расположенной на территории Академгородка г. Томска, для получения краткосрочного прогноза. Результаты спрогнозированных значений для исторических дат сравнивались с данными измерений.

Оценка точности прогнозирования загрязненности городского воздуха

Быкова К. А.

ТГУ, Томск
e-mail: 17_07_kris@mail.ru

В настоящее время для изучения процесса загрязнения атмосферного воздуха используются различные математические модели, учитывающие перенос примесей в пространстве и химические реакции между компонентами примеси. Одной из таких моделей является математическая модель, разработанная в Томском государственном университете [1], адаптированная к условиям г. Томска и способная давать прогноз качества воздуха на сутки вперед.

Целью работы является оценка точности прогноза, получаемого с использованием модели ТГУ. Для оценки точности прогноза использовалиськритерии: средняя абсолютная ошибка прогноза, средняя квадратическая ошибка прогноза, средняя арифметическая (систематическая) ошибка, предложенные в [2].

Литература

1. A. A. Bart and A. V. Starchenko"Modelling of urban air pollution by anthropogenic and biogenic source emissions Proc. SPIE 9292, 20th International Symposium on Atmospheric and Ocean Optics: Atmospheric Physics, 929248 (November 25, 2014); doi:10.1117/12.2075132; http://dx.doi.org/10.1117/12.2075132
2. Seinfeld J.H., Pandis S.N. Atmospheric Chemistry and Physics: From Air Pollution to Climate Change, SecondEdition. Wiley, 2006

Математическое моделирование процесса самоочищения на участке реки в одномерной постановке

Цыденов Б. Б., Михайлов М. Д.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
e-mail: bairtsydenov@mail.ru

Рассматривается процесс самоочищения, описываемый модификацией моделей Стритера-Фелпса и Герберта [1],[2]. Численная реализация указанной модели осуществлялась с помощью явной схемы Лакса-Фридрихса [1],[3]. Исследовались вопросы аппроксимации, устойчивости и сходимости численного метода. Изучалось влияние длины реки, скорости ее течения, глубины, значений констант полунасыщения,скорости аэрации на процесс самоочищения водного потока.

Проведены численные расчеты, результаты которых представлены в виде графиков. Дается анализ.

Литература

1. Абеляшев Д.Г., Михайлов М.Д. Математическое моделирование процессов самоочищения реки с использованием модификации моделей Герберта и Стритера-Фелпса // Материалы VII Сибирской конференции по параллельным высокопроизводительным вычислениям. Томск: Изд. Томского Университета, 2014. - С.89-96.
2. Вавилин В.А. Нелинейные модели биологической очистки и процессов самоочищения в реках // В.А. Вавилин. - М.: Наука, 1981. - 160 с.
3. Breuss Michael. The correct use of the Lax-Friedrichs method // M2AN, Vol.38, № 3, 2004. - pp. 519-540.

Исследование клеточных автоматов с помощью системы Mathematica

А. М. Жуматаев, В. М. Зюзьков

Томский государственный университет, Томск
e-mail: anarbek130896@gmail.com

В работе рассматривается классические одномерные и двумерные клеточные автоматы: одномерные – Стивена Wolframa [1], [2]; двумерные - «Игра Жизнь» Джона Конуэя [2]. Используя Wolfram Mathematica созданы демонстрации, показывающие поведение указанных клеточных автоматов. Показывается что, как и в общем случае, эволюция данных клеточных автоматов может быть отнесена к одному из следующих четырех общих классов (в скобках приводится аналогия с физическими и вычислительными системами): однородные (стабильные) состояния (предельные точки); периодические структуры (предельные циклы); хаотическая структура (странные аттракторы); сложные локализованные структуры (возможная аналогия с уни- версальными вычислениями).

Литература

1. Зюзьков В. М. Синергетика для программистов - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2001 г. ,194 с

2. Stephen Wolfram A NKS-Wolfram Media, 2002г. , 1280 с

Визуализация множеств Жюлиа и Мандельброта с помощью системы Mathematica

Лаевский В. М.

ТГУ, Томск
e-mail: vladimirml95@gmail.com

Множества Жюлиа и Мандельброта служат хорошими примерами динамики итераций комплексных отображений. [1] Рассмотрим комплексные отображения $f_c : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f_c(z) = z^2 + c$.

Определение 1. *Множество Жюлиа функции f, обозначаемое $J(f)$, определяется как граничное множество $J(f) = \partial\{z|f^n(z) \to \infty$ при $n \to \infty\}$.*

Для последовательности $f^n(z)$ имеется три возможности:

1) модуль всех точек последовательности меньше двух;

2) последовательность уходит в бесконечность;

3) комплексная плоскость делится на два области (ограниченную и неограниченную), точки последовательности лежат на общей границе этих областей. Ограниченная область может быть связным или вполне несвязным множеством.

Определение 2. *Множество Мандельброта M для полинома $f_c(z) = z^2 + c$ определяется как множество вида $M = \{c \in \mathbb{C}|f_c^n(0)$ не стремится к ∞ при $n \to \infty\}$.*

Граница множества является фракталом. Множество Мандельброта является в некотором смысле описанием всех множеств Жулиа.

Теорема 1. *Пусть M - множество Мандельброта. 1) для каждой точки $c \in M$ соответствующее ей множество Жюлиа $J(f_c)$ связно; 2) для каждой точки $c \notin M$ соответствующее ей множество Жюлиа $J(f_c)$ вполне несвязно и является канторовым множеством.*

Визуализация этих множеств была проведена с помощью системы Mathematica, используя демонстрации в формате CDF.

Литература

1. Зюзьков В.М. Синергетика для программистов: учебное пособие. - Томск: Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники, 2001. - 193 с.

Схема "Ромб"решения одномерной задачи теплопроводности в неоднородной пластине

Христенко Е. А., Лаева В. И.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
e-mail: ofmepan@gmail.com

В данной работе рассматривается решение задачи теплопроводности в многослойной пластине с граничными условиями третьего рода. Для построения разностной схемы используется неявный конечно-разностный метод «Ромб» [1]. При построении разностной схемы уравнение аппроксимируется в пределах каждой ячейки, без привлечения соседних, что особенно важно при использовании не равномерных сеток. Схема позволяет рассчитывать температуру и тепловой поток в узлах разностной сетки и, таким образом, не требуется аппроксимация производных в граничных условиях. Вычисление коэффициентов теплопроводности производится в середине ячейки, тем самым снимается вопрос об усреднении коэффициентов на границах сред.

Проведено исследование разностной схемы на монотонность, устойчивость и погрешность аппроксимации. Был построен численный метод решения разностной схемы, аналогичный потоковому варианту метода прогонки [2].

Литература

1. Гаджиев А.Д. Неявный конечно-разностный метод «Ромб» для численного решения уравнений газовой динамики с теплопроводностью / А.Д. Гаджиев, В.Н. Писарев // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 1979. - 19. - 5. с. 1288 – 1303.
2. Самарский А. Методы решения сеточных уравнений: [учебное пособие для вузов по специальности "Прикладная математика"] / А. А. Самарский, Е. С. Николаев. - Москва: Наука , 1978. – 588 с.

Уточнение компонент вектора скорости для более точного отражения реального поля ветра

Лемешко Д. Д.

ТГУ, Томск
e-mail: dmitriy-lemeshko@mail.ru

При математическом моделировании атмосферных процессов часто приходится решать задачу перехода от одной сетки к другой, более подробной. В работе [1] проведен обзор, используемых для малого перехода, методов, которые сравниваются с использованием двух наборов данных. Первый набор является идеализированным распределением концентрации, в котором известно точное решение, второй является потенциальным полем потока. В данной работе представлен и описан алгоритм перехода от прогностических данных глобального масштаба модели ПЛАВ к данным регионального масштаба на основе математического аппарата интерполирования. Данный переход был осуществлен по формуле Шепарда (IDW-алгоритма)[2]. Значения компонент вектора ветра, полученные путем интерполяции, могут не удовлетворять условию неразрыности из-за возникающей погрешности. После получения приближенных значений компонент вектора скорости ветра, было произведено уточнение этих компонент, для того, чтобы выполнялось условие, выраженное в уравнении неразрывности. Потом это условие было минимизировано. Для этого использовался функционал, предложенный в [3].

Литература

1. Godin W.R., McRae G.J., Seinfeld J.H., A Comparison of Interpolation Methods for Sparse Data: Application to Wind and Concentration Fields //Journal of applied meteorology. June 1979.
2. Масюков А. В., Модификации интерполяционного метода Шепарда на основе фундаментальных решений.
3. Christine A., Sherman C.A, A Mass-Consistent Model for Wind Fields over Complex Terrain // Journal of applied meteorology. 4 March 1976.

Численное решение прямой задачи электроимпедансной томографии в подготовке выборки для обучения искусственной нейронной сети *

Семёнов Е. В.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: semyonov@math.tsu.ru

Для того чтобы решить обратную задачу электроимпедансной томографии с помощью искусственной нейронной сети, сначала необходимо создать подходящую сеть, которая будет способна обучаться, адаптируясь к решению конкретной задачи. При создании сети необходимо учитывать то, с какими данными будет работать сеть, какой размерности эти данные. Необходимо правильно выбрать структуру сети, количество слоев, количество нейронов в каждом слое, количество связей между слоями и тип этих связей [1]. Следующим шагом будет обучение этой сети, для которого необходимо предоставить на вход сети данные, нуждающиеся в обработке, а на выходе сети поставить в соответствие входным данным ожидаемые выходные результаты. Набор таких пар, составленных из обрабатываемых данных на входе и ожидаемых данных на выходе, в совокупности образует обучающую выборку для нейронной сети.

При создании обучающей выборки для нейронной сети, направленной на решение обратной задачи, прежде всего необходимо остановиться на решении прямой задачи. Те данные прямой задачи, которые были известны на входе, до её решения, будут формировать второй элемент пары данных, составляющей обучающую выборку. При обучении искусственной нейронной сети эти данные будут подаваться на выход сети. Результаты решения же прямой задачи будут формировать первый элемент пары из выборки, эти данные будут подаваться уже на вход сети в процессе обучения.

В работе рассмотрены подходы к численному решению прямой задачи, направленные на формирование обучающей выборки.

Литература

1. М. Тим Джонс Программирование искусственного интеллекта в приложениях; Пер. с англ. Осипов А.И.-М.: ДМК Пресс, 2004.

*Работа выполнена по Государственному Заданию Министерства образования и науки РФ, №5.628.2014/К.

Распознавание людей на снимках ToF-камер

Монголин А. С., Федорова О. П.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: mangustalex11@gmail.com

В современном мире информационных технологий огромную роль играют автоматизированные системы, способные распознавать и классифицировать различные сцены и объекты. Так, неотъемлемой частью работы в местах пребывания человека является слежение за людьми с помощью камер наружного наблюдения.

Для того, чтобы компьютер научился определять, анализировать и классифицировать сцены и объекты в автоматическом режиме, его необходимо обучить компьютерному зрению. Подобные алгоритмы уже существуют и реализованы для стандартных камер наружного наблюдения. Однако, в последнее время начинает набирать популярность иной тип камер – Time-of-Flight, необходимый для построения объёмной картины. И для таких камер, расположенных сверху, нет распространенного программного обеспечения, способного распознавать людей.

В работе рассмотрен метод Виолы-Джонса, который позволит обнаруживать объекты на изображениях в реальном времени. К сожалению, его применение к снимкам ToF-камер крайне затруднено в силу наличия огромного числа шумов на последних. Поэтому дополнительно в работе рассмотрены методы улучшения изображения для наиболее успешного выделения людей.

Литература

1. Комьютерное зрение [Электронный ресурс] : Свободная энциклопедия, Википедия. URL: https://ru.wikipedia.org/wiki/Компьютерное зрение (дата обращения: 20.02.2016).
2. The Viola/Jones Face Detector [Электронный ресурс] : Презентация. URL: http://www.cs.ubc.ca/ lowe/425/slides/13-ViolaJones.pdf (дата обращения: 15.02.2016).

Усвоение спутниковых данных измерений влажности почвы ASCAT при помощи фильтра Калмана *

Ерин С. И.

Томский государственнный университет, г. Томск
e-mail: sergei.erin@mail.ru

Математические модели атмосферы активно применяются в современной метеорологии для численных расчетов прогнозов погоды. Математические модели очень чувствительны к входным данным, и, как следствие, одной из важнейших проблем является проблема повышения точности начальных данных, которые модель получает на вход. Для решения проблемы повышения точности численного прогноза погоды предлагается использовать усвоение спутниковых данных измерений влажности почвы.

Влажность почвы является одним из основных факторов, влияющих на формирование поверхностных потоков явного и скрытого тепла. В Европейском центре среднесрочных прогнозов наглядно показали, что ошибки в задании влажности почвы оказывают влияние на качество краткосрочного и среднесрочного численного прогноза погоды [1].

Алгоритм фильтра Калмана позволяет по ряду данных наблюдений за различные моменты времени и прогностической модели, которая рассматривается как динамико - стохастическая система, получить оптимальную оценку состояния атмосферы в смысле минимума среднеквадратической ошибки оценивания.

По итогам работы рассмотрено применение фильтра Калмана для усвоения спутниковых данных измерений влажности почвы в модель ПЛАВ.

Литература

1. Mahfouf J-F. Analysis of soil moisture from near-surface parameters: A feasability study // J. Appl. Meteor.. 1991. Vol. 30. P. 1534–1547.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-6896.2015.5.

Обработка спутниковых данных температуры подстилающей поверхности Земли *

Давыдов А. С., Богословский Н. Н.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, Томск
e-mail: afoniashka@gmail.com

Численное прогнозирование погоды является одной из важнейших задач. Для численного расчета прогноза погоды на несколько суток необходимо учитывать множество факторов, влияющих на точность прогнозирования. Для повышения точности прогноза в современных моделях используется усвоение данных наблюдений. В последнее десятилетие все больше измерений характеристик атмосферы и подстилающей поверхности проводится с использованием дистанционных методов зондирования.

В работе рассматривается расшифровка спутниковой информации и наглядное представление температуры подстилающей поверхности Земли. Восстановление температуры поверхности земли основано на измерениях, проводимых с использованием системы MODIS [1, 2], установленной на спутниках Terra и Aqua. Орбита спутников проходит с севера на юг через экватор утром, и с юга на север над экватором во второй половине дня. Спутники покрывают всю земную поверхность каждые 1-2 дня, и получают данные в 36 спектральных диапазонах.

Литература

1. Salomonson, V. V., Barnes, W. L., Maymon, W. P., Montgomery, H., Ostrow, H. MODIS: Advanced facility instrument for studies of the Earth as a system // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 1989. No. 27. P. 145-153.
2. Wan, Z., Dozier, J. A generalized split-window algorithm for retrieving land-surface temperature from space // IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing. 1996. No. 34. P. 892-905.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Президента РФ МК-6896.2015.5.

Численное интегрирование

Смиян Н. С., Данилкин Е. А.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: mr.turner.x@mail.ru

Под численным интегрированием подразумевают вычисление приближенного значения определенного интеграла. Как правило, численное интегрирование применяется в двух случаях: когда подынтегральная функция задана таблично (не аналитически) или если вычисление ее первообразной вызывает сложности или вообще не представляется возможным (первообразная не представляется аналитически).

Основная идея методов численного интегрирования состоит в замене подынтегральной функции более простой, интеграл от которой легко вычисляется аналитически. Целью данной работы было познакомиться с методами численного интеграла, сравнить изученные методы между собой, оценить точность и время работы каждого из них.

В докладе будут представлены следующие методы численного интегрирования: методы правых и левых прямоугольников, метод трапеций и метод Симпсона. Для выполнения практической части работы все изученные алгоритмы численного интегрирования реализованы на языке программирования C++ и адаптированы на использование многопроцессорной вычислительной техники с распределенной памятью.

При распределении вычислительной работы по процессам использован метод геометрической декомпозиции области исследования [1]. С этой целью промежуток интегрирования разбивался на отрезки равной длины по числу используемых процессов, и каждый процесс выполнял вычисления для своего отрезка. Затем полученные каждым процессом результаты суммировались на процессе с номером нуль. Для организации обмена сообщениями между процессами использовалась библиотека MPI. Все расчеты проводились на кластере ТГУ СКИФ Cyberia.

Литература

1. Старченко А. В. Методы параллельных вычислений / А. В. Старченко, В. Н. Берцун. – Томск : Изд-во Том.ун-та, 2013. – 225 с.

Расчет поля течения около затупленного тела в невязком ударном слое *

Помогаева С. В., Гольдин В. Д.

НИИ ТГУ, г. Томск
e-mail: lanapom.92@gmail.com

Задача обтекания затупленных тел при сверх- и гиперзвуковых скоростях имеет широкое применение в таких областях природы и техники как баллистика, ракетостроение, метеорная физика, самолетостроение и др.

Решение ищется из уравнений Эйлера. Граничными условиями для системы служат условие непротекания на поверхности тела, условия симметрии на оси течения и соотношения Ренкина-Гюгонио на поверхности головной ударной волны [1] .

В настоящей работе предлагается новый численный метод для решения задач такого типа, основанный на методе глобальных итераций [2]. Суть метода состоит в выводе и решении интегро-дифференциального уравнения относительно отхода ударной волны.

$$\frac{d}{dz}\left[a(z)\frac{df}{dz}(z)\right] + b(z)\left[\frac{df}{d\xi}\right] + c(z)[f(\xi)] = d(z),$$

где z – осевая координата ($z \geq 0$), $f(z)$ – функция отхода ударной волны, $a(z)$, $b(z)$ и $c(z)$ – интегральные операторы, действующие на функции $f(\xi)$ и $\frac{df}{d\xi}$ при $\xi \leq z$.

Анализ коэффициентов уравнения на известных решениях показывает, что коэффициент при старшей производной $a(z)$ равен нулю при $z = 0$ и при некотором $z* > 0$. Условием, замыкающим алгоритм, является условие гладкости решения в окрестности точки $z*$.

Литература

1. Лунев В.В. Течение реальных газов с большими скоростями // М.: Физматлит 2007. 759 с.
2. Гиперзвуковая аэродинамика и теплообмен спускаемых космических аппаратов и планетных зондов / под ред. Г. А. Тирского // М. : Физматлит. 2011. - 546 с.

---

*Работа выполнена в соответствии с госзаданием № 9.1024.2014/к Минобрнауки РФ.

О разбиении цифровых изображений на классы методами k-means, Forel и классификатором Байесса

Амшарюк Е. И., Фёдорова О. П.

ТГУ, г. Томск
e-mail: ekaterinaamsharyuk@gmail.com

Развитие компьютерных технологий привело к росту количества цифровых изображений. При таких объемах данных актуальной задачей является выбор признаков отдельных изображений и поиск нужных снимков в базах изображений. Предварительная кластеризация позволяет сформировать совокупности «близких» в каком-либо смысле изображений. Что позволяет уменьшить время поиска нужного изображения.

Существуют различные методы кластеризации. В данной работе рассматриваются три таких метода, а именно метод Forel [1], метод k-means [2], и] и разделение на классы с помощью классификатора Байеса [3]. В данной работе проводится разбиение на классы (кластеры) при использовании различных видов дескрипторов. Анализируются таблицы ошибок для используемых методов. Анализ показывает, что классификатор Байеса лучше всего справляется с задачей классификации, так как его ошибка в рассмотренных примерах близка к нулю. Методы Forel и k-means выдают практически одинаковые результаты, их ошибки составляют 0,025% и 0,02% соответственно. Также было показано, что при использовании средних по значениям ДПФ, учитывается не только цвет, но и фактура изображения. Объекты разной фактуры и одного цвета разбиваются на «правильные» классы с высокой точностью и процент объектов, попавших в чужой класс невелик.

Литература

1. Загоруйко Н.Г. Прикладные методы анализа данных и знаний. - Новосибирск: ИМ СО РАН, 1999, стр. 270
2. Wang J. Z., Du Y., “Scalable Integrated Region-based Image Retrieval using IRM and Statistical Clustering”, Proc. ACM and IEEE Joint Con
3. Дуда Р. Распознавание образов и анализ сцен:/ Пер. с англ./ - Москва: Мир, 1976. – 507с.

СЕКЦИЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Моделирование формирования курса валют с помощью модели ARIMA

Конищева А. А., Емельянова Т. В.

ТГУ, Томск
e-mail: koniantonina@yandex.ru

Моделирование колебаний обменных курсов валют на финансовых рынках в наше время является актуальным объектом последних исследований. С математической точки зрения колебания курсов валют являются случайными величинами и поэтому они лучше описываются стохастическими моделями. Одним из важных классов стохастических моделей для описания временных рядов являются стационарные модели. Однако многие временные ряды часто лучше описываются как нестационарные. Наиболее распространенным типом нестационарных стохастических процессов являются интегрированные процессы. Такую разновидность моделей выделяют в отдельный класс моделей авторегрессии - проинтегрированного скользящего среднего ARIMA(p, d, q), предложенную Боксом и Дженкинсом [1].

В данной работе рассматривается моделирование курса валют с помощью линейной стохастической модели типа ARIMA(p, d, q):

$$\Delta^d X_t = c + \sum_{i=1}^{p} a_i \Delta^d X_{t-i} + \sum_{j=1}^{q} b_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t$$

где X_t - нестационарный временной ряд; ε_t - стационарный временной ряд; c, a_i, b_j - параметры модели; Δ^d - оператор разности временного ряда порядка d.

Показано, что временные ряды курсов китайского юаня наилучшим образом описываются моделями ARIMA(1,1,0) и ARIMA(0,1,1).

Литература

1. Бокс Дж., Дженкинс Г. Анализ временных рядов. Прогноз и управление. Ч. 1,2. - М.: Мир, 1974.
2. Носко В.П. Введение в регресионный анализ временных рядов. - М.: НФПК, 2002. - 273 с.
3. Суслов В.И., Ибрагимов Н.М., Талышева Л.П., Цыплаков А.А. Эконометрика. - НСК.: НГУ, 2005. - 742 с.

Статистический анализ данных с использованием бутстреп-методов

Филимонова Ю. О., Пчелинцев Е. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: ylya2911@mail.ru

Стремительное изменение современного мира, связанное с достижениями вычислительной техники и информационных технологий обеспечило возможность быстрого и точного анализа очень больших массивов данных. Бутстреп – статистический метод, позволяющий осуществить многократную обработку исходного массива эмпирических данных, не требующий никакой априорной информации о законре распределения изучаемой случайной величины [1]. Бутстрапирование можно рассматривать как симмуляции статистики или статистической процедуры на основе оцененного распределения P_n наблюдаемых данных $x_1, x_2, ..., x_k, x_{k+1}, ..., x_{n-1}, x_n$. В случае зависимых наблюдений объект P_n является более сложным и значительно менее очевидным, чем для случая независимых данных[2]. Так в случае временных рядов классический бутстреп оказался неприменим, так как он нарушает структуру данного ряда. В работе [3] предложены некоторые модификации, которые позволяют применить первоначальную идею в контексте временных рядов. В данной работе представлен обзор и сравнение схем линейного и решетчатого бутстрепа для анализа моделей реальных временных рядов. Целью является получение четкой картины о сильных и слабых сторонах этих способов бутстрапирования.

Литература

1. Cheng Y., Wang Y., McVay D.A., Lee W.J. Practical Application of a Probabilistic Approach to Estimate Reserves Using Production Decline Data. Society of Petroleum Engineers. 2005. P.1-13.

2. Бюльман. Бутстрап - схемы для временных рядов // Квантиль. 2007. №3. С. 37-56.

3. C. Jentsch, D. N. Politis Valid resampling of higher order statistics using linear process bootstrap and autoregressive sieve bootstrap// Comm. Statist.—Theory and Methods. 2013. V. 42. P. 1277-1293.

Сравнение различных подходов к оцениванию параметров модели устойчивой авторегрессии первого порядка с дискретным временем

Иващенко А. О., Емельянова Т. В.

Национальный исследовательский Томский государственный университет, г. Томск
e-mail: anutka0694@gmail.com

В задачах обработки временных рядов широко используются авторегрессионные модели, описывающие стационарные случайные процессы. Как правило, параметры таких моделей неизвестны, поэтому требуется идентифицировать параметры модели перед ее использованием. В работе рассматривается задача оценивания параметра модели авторегрессии первого порядка с дискретным временем. Проводится исследование качества оценки модели.

При последовательном оценивании число наблюдений заранее неизвестно, оно определяется в ходе наблюдения процесса. При решении практических задач может оказаться, что при заданном объеме выборки момент остановки не достигается. В этом случае используют усеченную последовательную процедуру [1].

Целью исследования является сравнение последовательной и усеченной последовательной процедуры оценивания параметра модели устойчивой авторегрессии первого порядка

$$X_i = \lambda X_{i-1} + \sigma\varepsilon_i, i = 1, 2, ...,$$

где $X_0 = 0$, ε_i - независимые одинково распределенные случайные величины. $E\varepsilon_i = 0$, $Var\varepsilon_i = \sigma^2 < +\infty$.

Численным моделированием продемонстрировано, что обе процедуры последовательного оценивания позволяют получить оценки с заданной среднеквадратической точностью.

Литература

1. Dogadova T.V., Vasiliev V.A. Guaranteed Parameter Estimation of Stohastic Linear Regression by Sample of Fixed Size / T.V. Dogadova, V.A. Vasiliev // Вестник Томского государственного университета. – 2014. - №1(26). – с. 39-52.

Последовательное оценивание коэффициентов тригонометрической регрессии с непрерывным временем

Иванюк Ю.В., Емельянова Т.В.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: yuliya.ivanyuk.90@mail.ru

В настоящее время в современных системах сбора и обработки данных достаточно широко применяются специальные алгоритмы, основанные на обнаружении, различении и оценивании параметров сигналов с дискретным и непрерывным временем [1] – [2] .

Последовательная процедура оценивания, предложенная в [2] довольно сложна с точки зрения практической реализации для случая многих неизвестных параметров. Поэтому для оценивания временных параметров периодического сигнала при авторегрессионном шуме с неизвестными параметрами нами предлагается одноэтапная процедура оценивания, обеспечивающая оценивание параметров сигнала с заданной среднеквадратической точностью.

Рассматривалась задача оценивания параметров тригонометрического сигнала $S_t = \mu_1 + \sum_{j=1}^{r} \beta_{j1} \cos \omega_j t + \beta_{j2} \sin \omega_j t$ по наблюдениям $x_t = S_t + \xi_t$, где ξ_t - шум, являющийся стационарным процессом авторегрессии 1-го порядка: $\xi_t = \lambda_1 \xi_{t-1} + \varepsilon_t$.

В результате проведенных исследований изучены теоретические свойства предложенной процедуры. Получена асимптотическая формула средней длительности процедуры. В результате математического моделирования показано хорошее согласование с теоретическими данными.

Литература

1. Емельянова Т.В., Конев В.В. О последовательном оценивании периодического сигнала на фоне авторегрессионного шума// Вестник томского государственного университета. Математика и механика. 2015. №2(34), с 18-29.

2. Конев В.В., Пергаменщиков С.М. Гарантированное оценивание периодического сигнала на фоне авторегрессионных помех с неизвестными параметрами // Проблемы передачи информации. 1997. Т.3.Вып. 4.

Об оценке спектральной плотности

Вежнина О. А., Емельянова Т. В.

Томский государственный университет, г. Томск
e-mail: lesya_shemetova@mail.ru

Спектральная плотность, представляющая собой преобразование Фурье ковариационной функции стационарного случайного процесса, определяет свойства процесса и позволяет анализировать его структуру[1]. В связи с этим разработка методов построения и статистического анализа оценок спектральных плотностей является одной из главных проблем в спектральном анализе случайных процессов.

В работе [2] рассматривалась задача оценивания спектральной плотности стационарного случайного процесса, задаваемого уравнением $dX_t = \theta X_t dt + dW_t$, где $\theta > 0$ - неизвестный параметр, W_t – винеровский процесс.

Использовался последовательный план оценивания $(\tau(H), \widehat{\theta_\tau})$, где $\tau(H) = inf(t : \int\limits_0^t X_s^2 ds \geqslant H), \widehat{\theta_\tau} = \frac{1}{H} \int\limits_0^{\tau(H)} X_s dX_s$[3].

Среди различных подходов к оцениванию спектра значительное место занимают методы, основанные на вычислении периодограммы с последующим её сглаживанием при помощи спектрального окна $W_N(\centerdot), N \in \mathbb{N}$, т. е. используются оценки вида $\widehat{g}_N^W(\lambda) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} W_N(\lambda - \upsilon)\widehat{g}_N(\upsilon)d\upsilon$. В этих методах используется минимальная априорная информация о случайном процессе.

В настоящей работе проводится сравнение последовательной оценки и оценки, полученной путем сглаживания периодограммы с помощью окон Гаусса.

Литература

1. Булинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Булинский, А. Н. Ширяев. – М. : Физматлит, 2003. – 399 с.

2. Научная конференция студентов ММФ ТГУ: Сборник конференции (Томск, 24 – 30 апреля 2014 г.) – Томск: ТГУ, 2014 г. - 89 с.

3. Липцер Р. Ш. Статистика случайных процессов / Р. Ш. Липцер, А. Н. Ширяев. – М.: Наука, 1974. –696 с.

Построение хеджирующих стратегий для азиатского опциона купли европейского типа

Тугушев Н. Р.

Томский Государственный Университет, г. Томск
e-mail: nailtugushev911@gmail.com

Опцион – это ценная бумага, дающая покупателю право купить (продать) определенную ценность в установленный период или момент времени на заранее оговариваемых условиях. По времени исполнения опционы классифицируются на два типа: Европейского, с фиксированной датой исполнения и Американского, с возможным исполнением в любой момент времени до фиксированной даты истечения контракта.

Финансовый контракт, позволяющий в момент времени N купить акции (облигации) по фиксированной цене, называют опционом купли. Функция выплат азиатского опциона купли европейского типа имеет вид:

$$f_N = (\frac{\sum_{i=0}^{N} S_i}{N+1} - K)_+$$

где $(\frac{\sum_{i=0}^{N} S_i}{N+1} - K)_+ = \max((\frac{\sum_{i=0}^{N} S_i}{N+1} - K), 0)$, N - время исполнения и K – контрактная цена, фиксированная в момент покупки опциона.

Портфель ценных бумаг $\pi = (\beta, \gamma)$, где $\beta = (\beta_n(\omega))$ и $\gamma = (\gamma_n(\omega))$ - величины, характеризующие финансовое состояние в момент времени n, называется (x, f_N) - хеджем (где f_N - платежное обязательство,а x - начальный капитал), если $X_0^\pi = x$ и $X_N^\pi \geq f_N$ (Р-п.н.) [1].

Задачи хеджирования состоят в страховании сделок на рынке ценных бумаг и в том, чтобы, используя самофинансируемый портфель в момент времени $N < \infty$, в будущем довести свой капитал до величины, не меньшей, чем $f_N(\omega) = f_N(S_1, S_2, ..., S_N(\omega))$ [2].

Литература

1. Ширяев А.Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: ФАЗИС, 1998. Т. 1

2. Пергаменщиков С.М. Дискретные модели в теории финансов: модель Кокса-Росса-Рубинштейна: учебное пособие // Томск. 1995.

Применение теоремы о представлении к расчету хеджирующих стратегий для Азиатских опционов

Шишкова А. А.

НИ ТГУ, г.Томск
e-mail: alshishkovatomsk@gmail.com

Исследование финансовых рынков в настоящее время, помимо теоретического интереса, приобретает все большее практическое значение. Это объясняется тем, что финансовые рынки, представляющие собой основу рыночных отношений, являются важными индикаторами состояния экономики в целом.

Одна из фундоментальных задач финансовой математики – это распределение ресурсов между финансовыми активами с целью обеспечения достаточных выплат, а также, чтобы получить высокий доход.

В работе рассматривается модель Блэка-Шоулса вида (1), которая включает в себя два вида активов: безрисковые и рисковые.

$$\begin{cases} dB_t = rB_t dt, \quad B_0 = 1 \\ dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad S_0 > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Целью работы является построение хеджирующей стратегии для Азиатского опциона. Она достигается благодаря применению теоремы о представлении для мартингалов; введению в рассмотрение понятия Броуновского моста, что позволяет исследовать необходимую плотность случайной величины; вычислению коэффициентов мартингального представления с использованием квадратической характеристики.

Литература

1. Janvresse E., Pergamenchtchikov S. Mathematiques pour la finance // -Rouen, 2008.
2. Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н. Статистика случайных процессов. М.: Наука, 1979.

Оптимальное статистическое оценивание параметров в регрессионных моделях

Мусаев Т. О., Пчелинцев Е. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: kutmanmusaev11@mail.ru

В практических задачах важную роль при моделировании играет теория статистического оценивания. Большое внимание при построении наилучших оценок уделяется их асимптотическим свойствам, в частности эффективности или оптимальности [1, 2].

В данной работе изучается подход Гаека – Ле Кама доказательства асимптотической оптимальности оценок параметрических регрессий с шумами, имеющими достаточно сложную стохастическую природу. Например, такие модели возникают в задачах выделения сигнала, передаваемого по каналу связи с негауссовским шумом типа Леви [3]. В [1] подробно изучены случаи моделей с белым гауссовским шумом. Здесь предлагается развить метод Гаека – Ле Кама на случай негауссовских моделей. С этой целью выделяется класс распределений P_Θ шумов, удовлетворяющих условию локальной асимптотической нормальности (ЛАН).

Литература

1. 1 Ибрагимов И., Хасьминский Р. Асимптотическая теория оценивания. - М.: Наука-дата, 1979. - 528 с.
2. 2 Боровков А.А. Математическая Статистика. - СПб.: Лань, 2010. - 704с.
3. 3 Конев В.В., Пергаменщиков С.М., Пчелинцев Е.А. Оценивание регрессии с шумами импульсного типа по дискретным наблюдениям // ТВП, 58:3 (2013), 454–471.

О среднем времени безотказной работы резервированной системы

Губин В. Н.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: vovantus@sibmail.com

Пусть имеется система, в которой через некоторый промежуток времени фиксированной длины Δ проводится проверка исправности включённых в работу блоков. К началу работы системы имеется r исправных элементов.

Стратегией резервирования называется функция $K(r)$, заданная на $\mathbb{N}$, такая, что $m \leqslant K(r) \leqslant r$, показывающая, сколько элементов нужно включить в работу при наличии r исправных, где m – порог исправной работы системы. *Критерием качества резервирования* называется функционал, определённый на множестве пар $(r, K(r))$, принимающий неотрицательные значения. Стратегию, которая доставляет максимум выбранному критерию, называется *оптимальной* и обозначается $K_0(r)$.

В данной работе в роли критерия качества резервирования выступает среднее время жизни системы на бесконечном промежутке времени. Задача состоит в нахождении оптимальной стратегии при известном количестве имеющихся в наличии исправных элементов в некоторый момент проверки. Впервые эта модель была введена Герцбахом И.Б. в [1] для критерия вероятности безотказной работы системы на конечном промежутке времени. Пусть $T(k, r)$ – среднее время исправной работы системы, если на первом шаге в работу включается k элементов из r исправных, а затем переходим на оптимальную стратегию; $T(r)$ – среднее время безотказной работы системы при оптимальной стратегии, если в наличии имеется r элементов. По формуле полного математического ожидания получим

$$T(k, r) = \sum_{i=1}^{k-m} C_k^i p^{k-i} q^i T(r - i). \qquad (1)$$

С помощью (1) получены многие свойства оптимальных стратегий, позволяющие упростить алгоритм их поиска. В частности,

Теорема 1. $\forall r \geqslant 1$ *выполнено* $K_0(r) \leqslant K_0(r+1) \leqslant K_0(r) + 1$.

Литература

1. Герцбах И.Б. Об оптимальном управлении включением резервных элементов // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1966. №5. С. 75-80.

Статистический анализ финансовых показателей отраслевой экономики современной России

Повзун М. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: povzunyasha@gmail.com

Любое современное предприятие невозможно представить без финансового анализа его отчетности. Анализ финансовых отчетов-это систематическое рассмотрение и оценка информации для получения достоверных выводов относительно прошлого состояния компании с целью прогнозирования ее жизнеспособности в будущем. Он помогает оценить различные риски предприятия [3].

В настоящей работе исследуется зависимость различных показателей бухгалтерских отчетов предприятиях сельскохозяйственной отрасли экономики России. Анализ проводится на основе данных финансовой отчетности [2].

В экономической теории существует множество подходов для финансового анализа отчетности. В последнее время особое внимание уделяется статистическим методам. Среди многообразия таких методов в работе используются методы оценивания параметров модели, критерии проверки статистических гипотез и корреляционно-регрессионный анализ [1].

В результате исследования выявлены зависимости между показателями эффективности и развития сельскохозяйственной отрасли и построены прогнозы средних значений этих показателей.

Литература

1. Айвазян С., Мхитарян В. Прикладная статистика и основы эконометрики.-М.: Юнити-дата, 2001. - 656 с.
2. Бухгалтерская отчетность предприятий и за 2014 год [Электронный ресурс] // Федеральная служба государственной статистики. – Электрон. дан. – 2015. – URL: http://www.gks.ru/opendata/dataset/7708234640-bdboo2014 (дата обращения: 04.03.2016).
3. Карлин Т.П. Анализ финансовых отчетов (на основе GAAP): учебник. / Т.П. Карлин, А.Р. Макмин. – М. : ИНФАРМ-М, 2000. – 448 с.

Оракульное неравенство для среднеквадратическиго риска адаптивной улучшенной оценки функции гетероскедастичной регрессии *

Перелевский С. С., Пчелинцев Е. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: slavaperelevskiy@mail.ru

Пусть наблюдения описываются уравнением

$$y_j = S(x_j) + \sigma_j \xi_j, \ 1 \le j \le n, \tag{1}$$

где $x_j = j/n$, $S(\cdot) \in W_r^k$ – неизвестная функция, которую требуется оценить (соболевский класс W_r^k определен в [1]), $(\xi_j)_{1\le j\le n}$ – последовательность н.о.р.с.в. с нулевым средним и единичной дисперсией, $(\sigma_j)_{1\le j\le n}$ – неизвестные коэффициенты волатильности, которые могут зависеть от x_j , такие что $\min_{1\le j\le n}\sigma_j \ge \sigma_*$ и $\max_{1\le j\le n}\sigma_j \le \sigma^*$, где σ_* , σ^* – некоторые известные постоянные.

В данной работе доказывается оракульное неравенство для среднеквадратического риска адаптивной процедуры выбора модели на основе улучшенных оценок функции гетероскедастичной регрессии, предложенной в [2].

Теорема. *Пусть наблюдения описываются уравнением* (1)*. Тогда для любого* $0 < \rho < 1/2$ *среднеквадратический риск, предложенной процедуры выбора модели для функции* S *удовлетворяет оракульному неравенству*

$$R(S^*_{\lambda^*}, S) \le D(\rho) \min_{\lambda\in\Lambda} R(S^*_\lambda, S) + \frac{1}{n}\Psi_n(\rho),$$

где $\lim_{\rho\to 0} D(\rho) = 1$ *и* $\lim_{n\to\infty}\Psi_n/n = 0$.

Литература

1. Galthouk L.I., Pergamenshchikov S.M. Adaptive sequential estimation for ergodic diffusion processes in quadratic metric // Journal of Nonparametric Statistics, 2011, 23, 2, 255-285.

2. Перелевский С.С., Пчелинцев Е.А. Адаптивное улучшенное оценивание гетероскедастичной регрессии в непрерывном времени // Обозрение прикладной и промышленной математики, 2015, 22, 4, 491-492.

*Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект № 16-01-00121 А.

Построение хеджирующих стратегий азиатского опциона продажи Европейского типа

Анпилогова К. А.

Томский Государственный Университет, Томск
e-mail: kseniya.anpilogova1994@gmail.com

Опцион или контракт с опционом - это ценная бумага, дающая её обладателю право (но не обязательство) продать(купить) некоторую ценность на оговариваемых условиях.

По времени исполнения опционы делятся на два типа: Европейские и Американские. Опцион Европейского типа имеет фиксированную дату погашения, а Американский может быть предъявлен в любой момент до фиксированной даты его использования.

Опционы, дающие право продать, называются опционом продажи(put options).

Функция выплат азиатского опциона продажи Европейского типа имеет следующий вид:

$$f_N = (K - \frac{1}{N+1}\sum_{i=0}^{N} S_i)_+$$

где K - фиксированная константа, обозначающая оговариваемую контрактную цену, N - момент исполнения, а от f_N берем положительную часть.

Задача хеджирования заключается в том, чтобы, используя самофинансируемый портфель в некоторый заранее определенный момент времени $N < \infty$, в будущем довести свой капитал до величины, не меньшей, чем $f_N(\omega) = f_N(S_0, ..., S_N(\omega))$ [1].

Определение 1. *Говорят, что для данного x>0 и неотрицательной функции $f_N(\omega) = f_N(S_0, ..., S_N(\omega)$, самофинансируемая стратегия $\Pi = (\Pi_n, n = \overline{0, N})$ является (x, f_N)-хеджем, если*

$$\forall \omega \in \Omega, X_0^{\Pi} = x, X_N^{\Pi} \geq f_N(S_0, ..., S_N(\omega)$$

Литература

1. Пергаменщиков С.М. Дискретные модели в теории финансов:модель Кокса-Росса-Рубенштейна:учеб.пособие// Томск. 1995.

2. Ширяев А.Н. Стохастическая финансовая математика. М.:Наука. Физмат-лит,1980

Статистические модели языка

Завьялова А. В., Емельянова Т. В.

Томский государственный университет, г.Томск
e-mail: : alisa.zavjalova@rambler.ru

Речь — исторически сложившаяся форма общения людей. Известно, так же, что речь представляет собой психолингвистический процесс. Письменная речь охватывает языковые средства выражения мысли. На формирование письменной речи влияют самые различные обстоятельства: знания грамматики и литературы, профессия, местные диалекты и даже заболевания центральной нервной системы. Письменная речь, как и любое общественное явление, имеет свою языковую форму, в которую облечен ее смысл, - языковые средства, материализуют содержащиеся в ней мысли в виде словарного состава. И это значит, что частота употребления тех или иных слов может многое рассказать о человеке. Однако, слова состоят из букв, и следовательно, частота употребления тех или иных букв так же может об этом свидетельствовать.

В настоящей работе проведен детальный анализ частот употребления букв русского языка студентами различных факультетов, а именно механико-математического и психологического. Анализ был проведен на основе анкетирования студентов. Ответы студентов были сформированы в тексты, для которых рассчитывались частоты употребления каждой буквы, которые в дальнейшем сравнивались между собой по критерию Стьюдента, что бы увидеть значимо ли они отличаются. Статистическими методами исследована связь между успеваемостью студентов и частотами употребления различных букв в письменной речи. Цель исследования - показать, что профессиональная ориентация обуславливает различия в речи.

Литература

1. Дэйвид Г. Порядковые статистики. - М.:Наука,1979.-170с.
2. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. - М.: Мир, 1976.- 757с., ил.
3. Севастьянов Б.А. Курс теории вероятностей и математической статистики. Учебник. — М.: Наука, 1982. — 256 с.

Улучшенное оценивание параметров множественной линейной регрессии

Бондаренко И. А., Пчелинцев Е. А.

ТГУ, Томск
e-mail: star_irish@bk.ru

Для анализа и обработки статистических данных шикорое применение находят регрессионные модели, учитывающие случайный характер наблюдений. В настоящее время большое внимание уделяется моделям с минимальными требованиями и ограничениями на вероятностные характеристики случайных переменных, входящих в них. В данной работе предлагается множественная линейная регрессионная модель, описывающаяся уравнением вида:

$$Y = X\beta + \varepsilon \geq 0. \tag{1}$$

где β - неизвестный k-мерный вектор; Y - n-мерный вектор зависимых переменных, X - случайная матрица n$\times$ k; ε - n-мерный вектор случайных ошибок. Условие, что матрица X - случайна, соответсвует, например, в ситуациях при измерении независимых переменных могут возникать слуйчайные ошибки. Поэтому возникает необходимость рассматривать модели со стохастическими регрессорами. Задача - оценить вектор неизвестных параметров по наблюдениям Y и X. Приэтом качество оценки $\hat{\beta}$ будем измерять среднеквадратическим риском следующего вида:

$$R(\beta, \hat{\beta}) = E_p||\beta - \hat{\beta}||^2 \geq 0. \tag{2}$$

Классической оценкой вектора β является оценка по методу наименьших квадратов, также в работе вместо оценкок МНК предлагается улучшенная оценка вида: $\beta^* = (1 - \frac{\kappa\gamma}{||\hat{\beta}||})\hat{\beta}$, где $\gamma = \frac{1}{\theta + \sqrt{\lambda^* n}}$, $\theta = sup\{||\beta|| : \beta \in \mathfrak{B}\}$

Теорема 1. *Пусть в математической модели (1) случайные ошибки ε являются условно-гауссовскими относительно матрицы X с нулевым средним и условной ковариационной матрицией Σ_x и выполнены условия H_1) и H_2) [1]. Тогда разность среднеквадратических рисков предложенной оценки β^* и оценки МНК $\hat{\beta}$ удовлетворяет следующему неравенству: $R(\beta, \beta^*) - R(\beta, \hat{\beta}) \leq -(\kappa\gamma)^2$*

Литература

1. Pchelintsev E. Improved estimation in a non-Gaussian parametric regression // Statictical Inference for Stochastic Processes, 2013, v.16, №1, p. 15-28.

Стохастическое линейное моделирование стоимости энергоресурсов и курсов национальных валют

Чернушенко К. А., Емельянова Т. В.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: k.chernushenko@gmail.com

Уже на протяжении долгого времени, на валютном рынке отсутствует стабильность. С каждым днём растёт количество экономических факторов, влияющих на курс валют. Поэтому стоит попытаться построить математическую модель, которая выявит зависимость курса валюты от времени и даст возможность спрогнозировать стоимость валюты в будущем. В работе рассматривается аппроксимация стоимости энергоресурсов, а также курсов национальных валют, с помощью стохастических линейных моделей. Построены ARMA(p,q) модели вида:

$$x_t = \phi_1 x_{t-1} + ... + \phi_p x_{t-p} + \epsilon_t - \theta_1 \epsilon_{t-1} - ... - \theta_q \epsilon_{t-q}$$

для таких курсов валют, как казахстанский тенге и российский рубль, а также для стоимости нефти, которая влияет на курс этих валют [1, 2].

Для построения моделей понадобилась проверка на стационарность с помощью критерия Дики-Фуллера и критерия KPSS. [3]

Литература

1. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. М.: Мир, 1976. С. 455-457.
2. Суслов В.И. Эконометрия. М.: СО РАН, 2005. С. 384-471.
3. Критерий KPSS [Электронный ресурс]: - URL: http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=KPSS (Дата обращения: 15.12.2015).

Статистические методы анализа параметрических регрессионных моделей

Шайкина А. А., Пчелинцев Е. А.

Томский государственный университет, Томск
e-mail: a.shaykina@mail.ru

Для обработки и исследования зависимости одних данных от других достаточно удобно использовать различные модели регрессионного анализа. Они позволяют не только исследовать зависимость, но так же вычислить прогнозные значение интересующих переменных с учетом некоторой погрешности [1].

Исследование с помощью регрессионного анализа упрощает построение моделей зависимости и при этом имеется множество различных подходов интерпретирования полученных результатов. Основным вопросом является качество построенных моделей [1, 2].

В данной работе различными подходами исследуется качество парных и множественных линейных регрессионных моделей, предлагаемых для описания зависимостей курсов доллара США и евро от других валют через их относительные курсы к рублю.

Идентификация моделей проводится на основе реальных данных за период с 1 марта 2014 до 1 марта 2015 [http://www.cbr.ru]. Анализ регрессионных моделей осуществляется с помощью следующих статистических методов: анализ эмпирического моста; проверка адекватности модели; анализ остатков; анализ влиятельных наблюдений; анализ мультиколлинеарности и анализ прогноза значений откликов [1–3].

Литература

1. Айвазян С., Мхитарян В. Прикладная статистика и основы эконометрики.-М.: Юнити-дата, 2001. - 656 с.
2. Шайкина А.А., Пчелинцев Е.А. Исследование качества регрессионных моделей колебаний курсов валют // Сборник статей Молодежной научной конференции «Все грани математики и механики» (г. Томск, 24–30 апреля 2015 г.), с. 153-159.
3. Шаталин Е.В. Исследование регрессионных моделей зависимости курсов американского доллара и евро с помощью эмпирического моста // Вестн. НГУ. Сер. матем., мех., информ., 15:3 (2015), 91–97.

Методика исследования флуктуаций текстурных признаков изображений облачности по спутниковым снимкам

Курьянович К. В., Мусиенко О. П.

Институт оптики атмосферы имени В.Е. Зуева СО РАН, Томский государственный университет систем управления и радиоэлектроники (ТУСУР) ,г. Томск
e-mail: ksuyain@mail.ru

Основным источником информации об облачности в глобальном масштабе являются спутниковые данные, представленные в данной работе снимками MODIS с пространственным разрешением 250 м для 25 типов облачного покрова согласно метеорологическому стандарту. Поиск наборов характерных изображений типов облачности осуществлялся методикой сопоставления архивных данных метеостанций со спутниковой съемкой [1]. Для описания свойств изображений, относящихся к одному типу облачности, применялся статистический подход анализа текстуры, включающий в себя три метода расчета текстурных признаков: вектор разностей уровней яркости (GLDV), матрицы смежности уровней яркости (GLCM), гистограммы суммы и разности уровней яркости (SADH). Информативность текстурных признаков определялась по корреляционной методике [1]. Флуктуация сформированных наборов информативных текстурных признаков анализировалась на основе критерия согласия Колмогорова-Смирнова.

Получены следующие результаты: Сформированы наборы изображений с уникальной текстурой при помощи двумерного критерия Колмогорова-Смирнова. При этом сравнительный анализ проводился по самому информативному признаку. Построены статистические модели различных типов облачности. При этом рассматривались только двухпараметрические распределения. Разработана база данных 25 разновидностей облаков для автоматизированного построения и отображения статистических моделей текстурных признаков.

Литература

1. Астафуров В.Г., Евсюткин Т.В., Курьянович К.В., Скороходов А.В. Статистическая модель текстуры изображений различных типов облачности по данным MODIS. - Современные проблемы дистанционного зондирования Земли из космоса, 2013, Т. 10., № 4, с. 188–197.